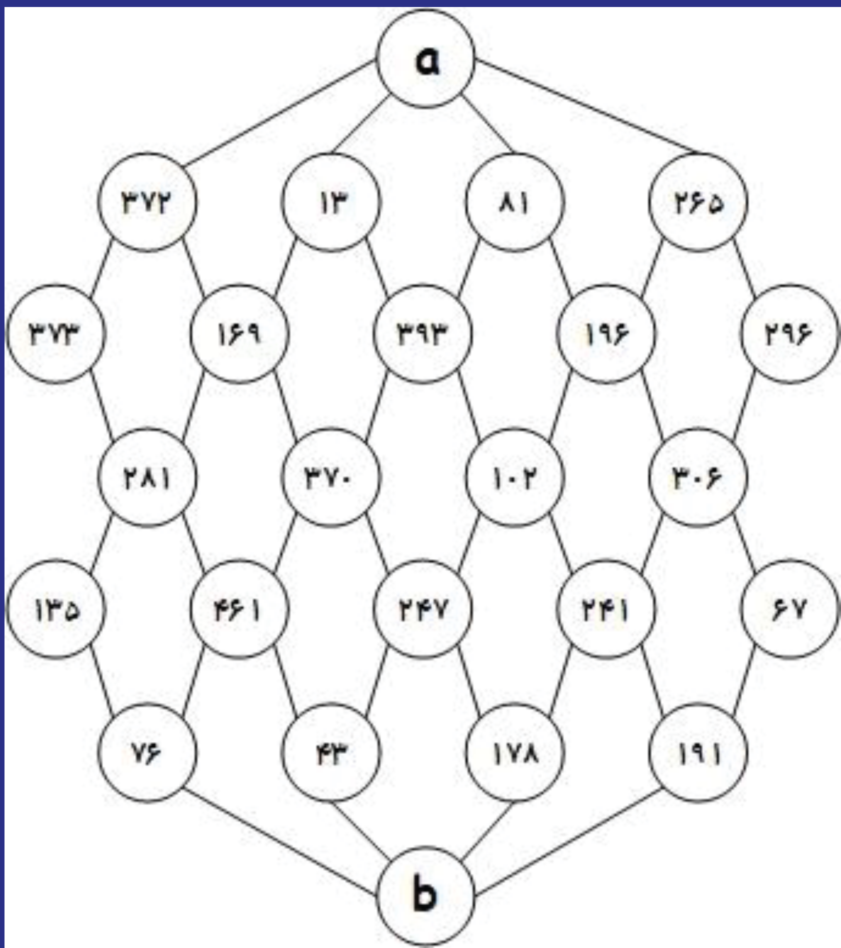
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد دوم

(سال اول دبیرستان - نیمسال دوم)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛

۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛

۳. همه داوطلبان کنکورها و المپیادها.

پرویز شهریاری

ریاضیات محاسبه‌ای

(جلد دوم)

نیم سال دوم

نظام جدید آموزشی

انتشارات مجید
خیابان لبافی‌نژاد، نرسیده به خ اردیبهشت، پلاک ۲۰۸ تلفن ۶۴۹۵۷۱۳

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد دوم)

پرویز شهریاری

چاپ سوم: تهران ۱۳۷۷
تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
چاپ: چاپخانه رامین
همهٔ حقوق محفوظ است.
شابک ۹ - ۰۲۰ - ۴۵۳ - ۹۶۴ ISBN 964 - 453 - 020 - 9
شابک دورهٔ ۴ جلدی ۳ - ۹۶ - ۵۵۰۹ - ۹۶۴
ISBN 964 - 5509 - 96 - 3 (4 Vol. Set)

۱۴۰۰ تومان

در این کتاب

از پرویز شهریاری

منتشر شده است:

- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال اول ۱۲۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد دوم) ـ سال اول دبیرستان ـ نیم سال دوم ۱۴۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد سوم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال اول ۱۵۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد چهارم) ـ سال دوم دبیرستان ـ نیم سال دوم ۱۳۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد پنجم) ـ سال سوم دبیرستان ـ ریاضی‌فیزیک ۱۶۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد آمریکا ـ با حل ۴۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد شوروی ـ با حل ۱۲۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد کشورهای مختلف ـ با حل ۱۶۰۰ تومان
- مهم‌ترین مسأله‌ها و قضیه‌های دشوار ریاضی ۱۵۰۰ تومان
- بازی‌ها ـ سرگرمی‌ها ـ معماها در ریاضیات ۱۲۰۰ تومان
- نظریهٔ ساختمان‌های هندسی ۶۰۰ تومان
- نابرابری ۶۰۰ تومان
- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی (مسأله با حل) ۱۲۰۰ تومان

پیشگفتار

استقبالی که از جلد اول «ریاضیات محاسبه‌ای» شد، مرا برآن داشت تا دست به‌کار تهیهٔ جلدهای بعدی آن بشوم. کتابی که در دست دارید، جلد دوم این رشته کتاب‌هاست و، با همان روش جلد اول، برپایهٔ تازه‌ترین نظام برنامهٔ آموزشی و برای نیم‌سال دوم سال اول تهیه شده است.

این کتاب هم طوری تنظیم شده، که دانش‌آموزان بتوانند، بدون نیاز به‌راهنما و کلاس‌های کمکی، آن را فرا گیرند و، به‌ویژه، برای آن‌هایی که می‌خواهند ریاضیات را به‌صورت دانشی واحد، همراه با آگاهی از تاریخ، فلسفه و کاربردهای ریاضی فراگیرند، سودمند باشد. برای مطالعهٔ این کتاب، به‌این نکته‌ها، توجه بفرمایید:

۱. کتاب درسی خود را فراموش نکنید، هم درس آن را فرا گیرید و هم مسأله‌های آن را حل کنید. حل مسأله‌های کتاب درسی، شما را برای حل مسأله‌های این کتاب آماده‌تر می‌کند. در کتاب حاضر، شبیه جلد اول، موضوع درسی (البته در سطحی بالاتر) شرح داده شده است، ولی هیچ یک از مسأله‌های کتاب درسی را درآن نیاورده‌ام، به‌همین دلیل، قبل از حل مسأله‌های این کتاب (که البته، به‌اندازهٔ کافی متنوع‌اند)، حل مسأله‌های کتاب درسی (که ساده‌تر و مقدماتی‌ترند) ضروری است.

۲. چه ضمن درس و چه ضمن مسأله‌ها، جابه‌جا، با نشانهٔ * روبه‌رو می‌شوید. این نشانه به‌معنای آن است که با موضوع یا مسأله جدی‌تر و یا دشوارتری روبه‌رو هستید. در دور اول مطالعه و یا اگر نمی‌خواهید ریاضیات را به‌طور جدی دنبال کنید، می‌تواند از آن‌ها صرف‌نظر کنید. این بخش‌ها و یا مسأله‌ها، برای کسانی است که به‌ریاضیات علاقهٔ بیشتری

دارند و می‌خواهند آن را عمیق‌تر فراگیرند.

۳. به‌ویژه در بخش مسأله‌ها، تلاش شده است، نیاز دانش‌آموزانی برطرف شود که می‌خواهند، بعدها، در کنکورها یا المپیادهای ریاضی شرکت کنند، (با توجه به‌سطح ریاضیات کلاس خود). ولی این، به‌معنای آن نیست که مسأله‌ها به‌صورتی پیچیده و رازگونه تهیه شده‌اند. مسأله‌ها ساده و قابل فهم‌اند، تنها گاهی نیاز به‌اندیشهٔ بیشتری دارند؛ و این اندیشه، در هریک از دانش‌آموزان وجود دارد. تنها پی‌گیری و تلاش می‌خواهد تا به‌آن‌چه می‌خواهند برسند.

۴. بلافاصله بعد از خواندن صورت مسأله، به‌حل آن مراجعه نکنید. اول خودتان را بیازمایید، خیلی زود ناامید نشوید؛ تنها وقتی به‌بخش حل مسأله‌ها مراجعه کنید که به‌اندازهٔ کافی درباره آن اندیشیده‌اید. ولی حتا وقتی مسأله را حل کرده‌اید، نگاهی به‌حل آن در کتاب بیندازید، زیرا بسیاری از نکته‌ها و یا موضوع‌های درسی، ضمن حل مسأله‌ها گفته شده است.

۵. به‌بخش‌های تاریخی کتاب، بها بدهید. تاریخ ریاضیات، به‌مفهومی، خود ریاضیات است و بسیار چیزها به‌ما می‌آموزد و، در ضمن، ما را قانع می‌کند که، هیچ‌چیز، حتا ریاضیات، بی‌تغییر و ساکن نیست. ریاضیات هم، مثل هرچیز دیگری، تغییر می‌کند و، در طول زمان، تکامل می‌یابد. ریاضیات، «موجودی زنده» است و، به‌همین دلیل، باید از گذشتهٔ آن آگاه بود تا بتوان آیندهٔ آن را پیش‌بینی کرد.

۶. گمان نکنید، راه‌حلی که دراین کتاب برای مسأله‌ای داده شده، تنها راه‌حل یا بهترین راه حل است. راه‌حل‌های دیگر و، به‌احتمالی، بهترین و زیباترین راه‌حل‌ها، پیش شماست. تلاش کنید آن‌ها را بیابید و، اگر مایل بودید، نویسندهٔ کتاب را هم، از نتیجهٔ تلاش خود آگاه کنید.

پیروز باشید

پیش از آغاز و یادآوری

با همین آگاهی‌هایی که از ریاضیات دارید، همهٔ مساله‌های این بخش را می‌توانید حل کنید؛ ولی برای حل برخی از آن‌ها (که با نشانهٔ * مشخص شده‌اند)، باید اندکی بیندیشید.

یکی از سودهای این گونه مساله‌ها، نظم بخشیدن به ذهن و آماده کردن آن، برای حل دشواری‌هایی است که در زندگی، و در رویارویی با جامعه و طبیعت، با آن‌ها برخورد می‌کنیم. **گالیله** می‌گفت «ریاضیات، زبان طبیعت است»، یعنی برای شناختن قانون‌هایی که بر طبیعت حکومت می‌کنند، باید با ریاضیات و روش‌های آن آشنا بود. ولی در واقع، کار به این سادگی نیست. اگر کسی ریاضیات را بیاموزد و با دستورها و قانون‌ها و روش‌های عمل آن آشنا شود، نمی‌تواند اطمینان داشته باشد که از عهدهٔ حل هر مساله‌ای از زندگی و طبیعت برمی‌آید. هر مسالهٔ تازه‌ای، روش تازه‌ای را نیاز دارد و، این روش را، در صورت مساله، نمی‌توان به روشنی دید. کسی که می‌خواهد مسالهٔ تازه‌ای را حل کند باید، به جز تسلط بر دستورها و قاعده‌ها، این توانائی را داشته باشد که، ضمن جست‌و جوی راه‌های حل مساله، کلید اصلی را بیابد و این، ممکن نیست، مگر با تمرین مداوم. وقتی دربارهٔ روش حل یک مساله می‌اندیشید، لازم نیست بتوانید، در حل آن، سرانجام موفق شوید.

خودِ اندیشیدن و راه‌های گوناگون را آزمایش کردن، به تدریج ذهن را برای مبارزه با هر دشواریِ تازه آماده می‌کند. اگر می‌بینید، در مسابقه‌های ریاضی (و مثلاً در المپیادهای داخلی و جهانی)، مساله‌هایی را مطرح می‌کنند که با مساله‌های عادی متفاوت است، به این دلیل است که نیرو و توان ذهنی شرکت کنندگان را بیازمایند؛ چرا که همه می‌دانند، خلاقیت ریاضی، در درجهٔ اول، با تمرین‌های طولانی به دست می‌آید.

صورت مساله را با دقت، و چند بار، بخوانید، بعد بدون این که دست به قلم ببرید، اندکی بیندیشید: از کجا و چگونه باید آغاز کرد؟ چه رابطه‌ای بین داده‌ها با خواسته‌های مساله وجود دارد؟ آیا می‌توان بدون حل مساله، پاسخ را حدس زد؟ آیا راه‌هایی برای آزمایش روی عددها یا شکل‌های ساده وجود دارد؟ ...؛ اگر مساله، حالت‌های خاص ساده‌ای دارد، اول آن‌ها را برای خود مطرح کنید. همیشه برای حل یک مسالهٔ دشوار، باید در جست‌وجوی مساله‌های ساده‌تری بود (که البته به مسالهٔ اصلی مربوط باشند) و، با تلاش برای حل این مساله‌های ساده‌تر، راهی مستقیم یا غیر مستقیم، برای حل مسالهٔ اصلی پیدا کرد.

اگر مساله را حل کردید، با راه حل کتاب مقایسه کنید. کدام ساده‌تر و زیباتر است؟ راه حل شما یا راه حل کتاب؟ و اگر، بعد از تلاش‌های بسیار، موفق به حل آن نشدید، آن وقت به حل کتاب مراجعه کنید. شما با تلاش خود، ولو این که نتوانسته باشید مساله را حل کنید، سود خود را برده‌اید. تلاش‌های شما، ذهن و اندیشهٔ شما را نیرومندتر کرده است و، در ضمن، با دیدن راه حل کتاب، متوجه می‌شوید، چه روش‌هایی را مورد آزمایش قرار نداده‌اید و یا در کجاها دچار گمراهی شده‌اید!

روی هر مساله، به اندازهٔ کافی بیندیشید و عمل کنید؛ این، مهم‌تر از آن است که موفق به حل آن بشوید یا در نیمه راه بمانید! اگر روی یک مساله، به اندازهٔ کافی اندیشیده باشید، حتا در حالتی که نتوانسته‌اید آن را به نتیجه

برسانید، برای شما بسیار سودمندتر از حالتی است که به راه حل ۱۰ مساله، به کمک دیگران و یا کتاب‌های حل مساله، پی برده باشید.

تمرین‌ها

۱. عددی دهدهی و کوچکتر از واحد را، به این ترتیب ساخته‌ایم: نخستین رقم بعد از ممیز را برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲^۱$ بر ۷؛ دومین رقم بعد از ممیز را برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲^۲$ بر ۷؛ سومین رقم بعد از ممیز را برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲^۳$ بر ۷؛ ... و به طور کلی، nامین رقم بعد از ممیز را برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم ۲^n بر ۷ می‌گیریم. ثابت کنید، این کسر دهدهی، یک کسر دوره‌ای (متناوب) است. کوچکترین دورهٔ گردش آن را پیدا کنید و، سپس، آن را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

۲. آیا می‌توان ۳۸ عدد طبیعی متوالی طوری پیدا کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۳۸ بخش‌پذیر باشد؟

۳. a و b را دو عدد دلخواه و نا برابر فرض می‌کنیم: $a \neq b$. تفاضل دو عدد a و b را برابر c می گیریم:

$$a - b = c \text{ یا } a = b + c$$

برابری $a - b = a - b$ روشن است. دو طرف برابری را می‌توان در یک عدد غیر صفر ضرب کرد. سمت چپ برابری را در a و سمت راست آن را در $b + c$ ضرب می‌کنیم (a با $b + c$ برابر است) و، به ترتیب، عمل‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$a - b = a - b;$$

$$a(a - b) = (b + c)(a - b);$$

$$a^۲ - ab = ab + ac - b^۲ - bc;$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc;$$
$$a(a-b-c) = b(a-b-c);$$
$$a = b$$

دو عدد دلخواه و مختلف a و b، برابر شدند. چه اشتباهی کرده‌ایم؟

۴. ظرفی ۱۰ لیتری پر از آب است. دو ظرف خالی، یکی ۷ لیتری و دیگری ۳ لیتری در اختیار داریم. چگونه می‌توان ۱۰ لیتر آب را، به دو بخش برابر ۵ لیتری تقسیم کرد؟ ظرف‌ها، درجه‌بندی نشده‌اند.

*۵. دنباله‌ای از عددهای طبیعی را نوشته‌ایم که، جمله‌های آن، بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشند:

$$۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \ldots$$

الف) صدمین جملهٔ این دنباله چه عددی است؟

ب) nامین جملهٔ دنباله، چه عددی است؟

۶. در شکل ۱، کیوان، آرش، مانی، گودرز و بهروز ایستاده‌اند. مانی از همه بزرگتر نیست، ولی از گودرز، آرش و کیوان بلندتر است. آرش کنار کیوان ایستاده و از او کوچکتر است. گودرز، برای این که دستش به کلید برق برسد، یا از چهار پایه استفاده می‌کند و یا از برادر بزرگترش آرش کمک می‌گیرد. نام بچه‌ها را از راست به چپ مشخص کنید.

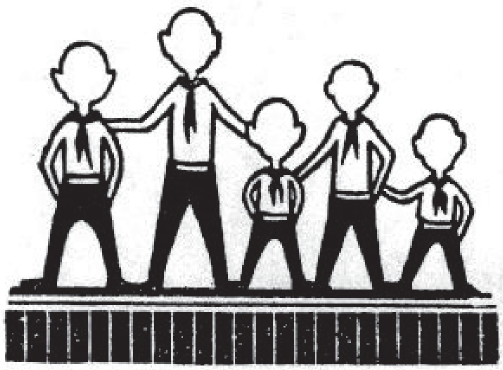
۷. n عددی طبیعی است. کوچکترین عدد n را پیدا کنید، به نحوی که، عدد

$$n^3 - 3n^2 + 4$$

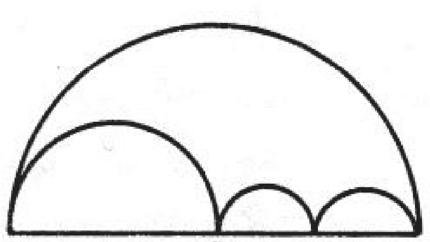
بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد.

*۸. این مجموعه داده شده است:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$



شکل ۱



شکل ۲

همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ M را، به صورت یک دنباله، طوری بنویسید که هر جملهٔ دنباله، نسبت به هر یک از جمله‌های مجاور خود، تنها در یک عضو اختلاف داشته باشد.

۹. نیم دایره‌ای به قطر AB رسم کرده‌ایم. نقطهٔ C وسط AB و نقطهٔ D وسط CB است. اکنون سه نیم دایره، به ترتیب به قطرهای AC، CD و DB رسم می‌کنیم.

طول کمان نیم دایرهٔ اصلی بیشتر است یا مجموع سه طول مربوط به کمان‌های سه نیم دایرهٔ کوچکتر؟

۱۰. با عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۹، سه عمل مختلف از عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بنویسید، به نحوی که از هر رقم یکبار، و تنها

یکبار، استفاده شده باشد. مثلاً به این سه عمل توجه کنید:

$$۱ + ۸ = ۹$$

$$۷ - ۳ = ۴$$

$$۲۰ : ۴ = ۵$$

سه عمل، مختلف‌اند (جمع، تفریق و تقسیم)، ولی از عدد ۴ دو بار استفاده شده است و عدد ۶ مورد استفاده قرار نگرفته است. شما پاسخ درست را پیدا کنید.

۱۱. مربی کودک، چند بچه را به کنار میز آورد. روی میز، در ظرف‌های جداگانه، موز و سیب و گلابی گذاشته شده بود. مربی از بچه‌ها خواست از هر میوه‌ای که دوست دارند، یک عدد بردارند:

۷ نفر موز؛ ۶ نفر سیب؛ ۵ نفر گلابی؛ ۴ نفر موز و سیب؛ ۳ نفر موز و گلابی؛ ۲ نفر سیب و گلابی و ۱ نفر موز و سیب و گلابی برداشتند. چند کودک دور میز جمع شده بودند؟

۱۲. پنج مربع، به صورتی که در شکل ۳ می‌بینید، روی یک مقوا رسم شده‌اند. می‌خواهیم با رسم خطهای راست، آن را به ۳ بخش طوری تقسیم کنیم که، با کنار هم گذاشتن این ۳ بخش، یک مربع به دست آید.

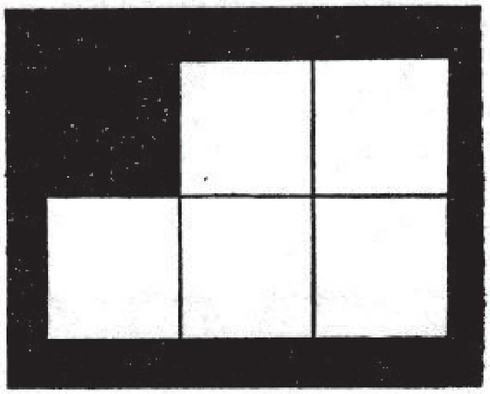
۱۳. ثابت کنید عدد ۵۷۵۹۹، عددی مرکب است.

۱۴. n، عددی طبیعی و $n^۲ + ۱$، عددی ده رقمی است. ثابت کنید، در بین رقم‌های عدد $n^۲ + ۱$، دست کم دو رقم برابر وجود دارد.

۱۵. ثابت کنید $\frac{۱۰^{۱۳۷۵} - ۱}{۸۱} - \frac{۱۳۷۵}{۹}$، عددی درست است.

*۱۶. به این برابری‌ها توجه کنید:

$$۱۵ = ۲^۲ + ۱۱,\quad ۱۶ = ۳^۲ + ۷;$$
$$۱۹ = ۴^۲ + ۳;\quad ۳۰ = ۵^۲ + ۵;$$
$$۶۲ = ۷^۲ + ۱۳;\quad ۱۰۰ = ۹^۲ + ۱۹$$



شکل ۳

هر عدد به صورت مجموع دو عدد نوشته شده است که یکی از آن‌ها مجذور کامل و دیگری عددی اول است. چند عدد طبیعی وجود دارد که نتوان آن‌ها را به این صورت نوشت؟

۱۷. x و y عددهایی سه رقمی‌اند. x را یکبار در سمت راست y و بار دیگر در سمت چپ آن نوشته‌ایم؛ دو عدد شش رقمی به دست می‌آید. ثابت کنید، تفاضل این دو عدد شش رقمی بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

*۱۸. a، b و c، طول‌های ضلع‌های یک مثلث‌اند و می‌دانیم:

$$(a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲ = ۲(a^۸ + b^۸ + c^۸)$$

ثابت کنید، این مثلث، قائم‌الزاویه است.

۱۹. ثابت کنید $۵^{۱۲} + ۲^{۱۴}$، عددی مرکب است.

۲۰. a عددی است طبیعی و زوج و می‌دانیم، می‌توان آن را، به صورت مجموع توان‌های دوم دو عدد درست نوشت. ثابت کنید، $\frac{a}{۲}$ را هم می‌توان به صورت مجموع توان‌های دوم دو عدد درست نوشت.

*۲۱. سه زیر مجموعهٔ بی پایان، از مجموعهٔ عددهای طبیعی طوری در نظر می‌گیریم که، دو به دو، عضو مشترکی نداشته باشند (سه زیر مجموعه،

مجموعه‌هایی «جدا از هم» هستند). ثابت کنید، می‌توان دو عدد a و b را از دو زیر مجموعهٔ مختلف، طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها، یعنی $a+b$، عضو مجموعهٔ سوم نباشد.

۲۲. سه عدد طبیعی مختلف را مجذور و، سپس، با هم جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر این مجموع را دوباره مجذور کنیم، عددی به دست می‌آید که می‌توان آن را، به صورت مجموع سه مجذور کامل نوشت.

۲۳. a و b عددهایی درست‌اند. برای چه مقدارهایی از a و b، عدد $a^۴+۴b^۴$، عددی اول است؟

۲۴. آیا عدد $۲^{۳۴۵۶۷۸۹}+۱$، عددی اول است؟

*۲۵. کسر دهدهی

$$۰/abc\ldots$$

که در آن، a، b، c، ...، هر کدام یک رقم‌اند، به این ترتیب ساخته شده است: رقم‌های a و b دلخواهند؛ از آن به بعد، هر رقم برابر است با رقم سمت راستِ مجموع دو رقم پیش از خود. ثابت کنید، این کسر، دوره‌ای (متناوب) است.

۲۶. ثابت کنید، عدد $۴۷^{۳۳}-۱۳^{۲۳}$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۲۷. هر یک از n عدد $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n یا برابر است با ۱+ و یا برابر است با ۱−؛ در ضمن می‌دانیم:

$$x_۱x_۲+x_۲x_۳+\ldots+x_{n-۱}x_n+x_nx_۱=۰$$

ثابت کنید، n مضرب ۴ است.

*۲۸. ۶ نفر به تصادف به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، می‌توان ۳ نفر در بین آن‌ها پیدا کرد که یا هر ۳ نفر با هم آشنا باشند و یا هیچ دو نفری از آن‌ها، یکدیگر را نشناسند.

۲۹. اگر بدانیم:

$$|a| \leq ۱, |b| \leq ۱, |c| \leq ۱$$

حداکثر مقدار عبارت زیر چقدر است:

$$a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

۳۰. n مثلث برابر و متساوی‌الاضلاع مقوایی انتخاب کرده‌ایم و دررأس‌های هر مثلث، عددهای ۱ و ۲ و ۳ را نوشته‌ایم. مثلث‌ها را روی هم قرار داده‌ایم تا به صورت یک ستون درآید (به شکل یک منشور با قاعدهٔ مثلثی). آیا ممکن است، مجموع عددها، در هر یال جانبی منشور، برابر ۵۵ شود؟

*۳۱. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۲}{x^۲ - ۱} + \frac{۴}{x^۲ - ۴} + \frac{۶}{x^۲ - ۹} + \ldots + \frac{۲۰}{x^۲ - ۱۰۰} =$$

$$= ۱۱ \left[\frac{۱}{(x-۱)(x+۱۰)} + \frac{۱}{(x-۲)(x+۹)} + \ldots + \frac{۱}{(x-۱۰)(x+۱)}\right]$$

*۳۲. ثابت کنید، عدد

$$۵۳ \times ۸۳ \times ۱۰۹ + ۴۰ \times ۶۶ \times ۹۶$$

عددی مرکب است.

*۳۳. a، b، c، d و M عددهایی درست‌اند و می‌دانیم:

$$a^۲ + M = b^۲, c^۲ + M = d^۲$$

ثابت کنید، عدد زیر مجذور کامل است:

$$۲(a + b)(c + d)(ac + bd - M)$$

*۳۴. برای سه عدد درست a و b و c می‌دانیم:

$$a+b+c=0$$

ثابت کنید $2(a^4+b^4+c^4)$ مجذور کامل است.

۳۵. انوشه و روزبه، هر کدام با اتومبیل خود، در یک زمان، از شهر A به طرف شهر B حرکت کردند. انوشه نصف راه را با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت و نصف دیگر راه را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت پیمود؛ ولی روزبه، همهٔ راه را با سرعت ۷۰ کیلومتر در ساعت رفت. آیا با هم به شهر B می‌رسند؟ و اگر پاسخ این پرسش، منفی است، روشن کنید، انوشه در چه فاصله‌ای از شهر A باید سرعت خود را به ۸۰ کیلومتر در ساعت برساند تا هر دو با هم به شهر B برسند؟

۳۶. سه خانواده، ۹ بطری شیر خریدند؛ بطری اول یک لیتری، بطری دوم دو لیتری، بطری سوم ۳ لیتری، ...، و بطری نهم ۹ لیتری بود. چگونه می‌توان این ۹ بطری را، بدون تقسیم شیر داخل هر بطری، بین این سه خانواده تقسیم کرد، به نحوی که، هر خانواده سه بطری داشته باشد و، در ضمن، مقدار شیری که به آن‌ها می‌رسد، یکسان باشد.

*۳۷. ثابت کنید، عبارت

$$(1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{100})(1+x^{102})-102x^{101}$$

برای هر مقدار حقیقی x، نمی‌تواند منفی شود؟

*۳۸. a، b، c، x، y و z، عددهایی حقیقی‌اند و می‌دانیم:

$$\begin{aligned} u_1 &= ax+by+cz, & v_1 &= ax+bz+cy,\\ u_2 &= ay+bz+cx, & v_2 &= az+by+cx,\\ u_3 &= az+bx+cy, & v_3 &= ay+bx+cz \end{aligned}$$

ثابت کنید، به شرط $u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$، داریم:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

*۳۹. عددی پنج رقمی بر ۴۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، هر عدد پنج رقمی دیگری که از تبدیل دُوری رقم‌های این عدد به دست آید، بر ۴۱ بخش‌پذیر است.

یادداشت. عبارت $abc + d$ را در نظر بگیرید. فرض کنید، حرف‌های a، b، c و d را، به همین ترتیب، روی محیط دایره‌ای نوشته باشیم: b بعد از a؛ c بعد از b؛ d بعد از c و a بعد از d. اگر در عبارت مفروض، هر حرف را به حرف بعد از خودش تبدیل کنیم (a به b، b به c، c به d و d به a)، آن وقت می‌گویند، یک **تبدیل دُوری** انجام داده‌ایم. تبدیل‌های دُوری عبارت $abc + d$، به ترتیب، چنین‌اند:

$$bcd + a$$

$$cda + b$$

$$dab + c$$

تبدیل دُوری عبارت اخیر، همان عبارت مفروض می‌شود.

اکنون، به عنوان نمونه، عدد پنج رقمی

۴۶۱۲۵

را در نظر می‌گیریم. عددهای پنج رقمی که از تبدیل دُوری رقم‌های این عدد، به دست می‌آید، چنین‌اند:

۶۱۲۵۴

۱۲۵۴۶

۲۵۴۶۱

۵۴۶۱۲

تبدیل بعدی، خود عدد اصلی را می‌دهد. (عدد اصلی بر ۴۱ بخش‌پذیر است؛ در نتیجه، چهار تبدیل دُوری آن هم، بر ۴۱ بخش‌پذیر می‌شود: آزمایش کنید!).

*۴۰. a و b دو عدد طبیعی‌اند و می‌دانیم $a^۲+ab+۱$ بر $b^۲+ab+۱$ بخش‌پذیر است ثابت کنید: $a = b$.

*۴۱. ثابت کنید، عدد

$$۵۱۲^۳ + ۶۷۵^۳ + ۷۲۰^۳$$

عددی مرکب است.

*۴۲. در چهار جعبهٔ هم اندازه و هم شکل، مهره‌هایی وجود دارد: در یکی سه مهرهٔ سیاه، در دیگری دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید، در سومی دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه و در چهارمی سه مهرهٔ سفید. روی هر یک از جعبه‌ها برچسبی وجود دارد: «۳ سیاه»، «۲ سیاه و ۱ سفید»، «۲ سفید و ۱ سیاه»، «۳ سفید». ولی نوشتهٔ هیچ برچسبی با مهره‌های درون آن جعبه تطبیق نمی‌کند. جعبه‌ها را جلو چهار نفر گذاشته‌ایم، به نحوی که هر کس تنها برچسب روی جعبهٔ خودش را می‌بیند. هر کس باید ۲ مهره را، به تصادف، از جعبهٔ خود بیرون بیاورد و، بدون این‌که به داخل جعبه نگاه کند، رنگ مهرهٔ باقی مانده در جعبه خود را اعلام کند.

اولی، دو مهره از جعبهٔ خود بیرون آورد و بلافاصله گفت:

«من ۲ مهرهٔ سیاه بیرون آورده‌ام و می‌توانم رنگ مهرهٔ باقی‌مانده را اعلام کنم».

دومی هم، بعد از بیرون آوردن ۲ مهره، گفت:

«من ۱ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سفید بیرون آورده‌ام و رنگ مهرهٔ باقی مانده را می‌دانم».

سومی ۲ مهره بیرون آورد، به برچسب روی جعبهٔ خود نگاه کرد و گفت:

«من ۲ مهرهٔ سفید بیرون آورده‌ام، ولی نمی‌توانم رنگ مهرهٔ باقی‌مانده را پیدا کنم».

چهارمی، بدون این که به برچسب روی جعبهٔ خود نگاه کند، گفت:

«نیازی ندارم مهره‌ای از جعبه بیرون بیاورم. من می‌توانم حتا بدون نگاه کردن به برچسب روی جعبه، رنگ مهره‌های داخل این جعبه را بگویم. در ضمن، رنگ مهره‌های باقی مانده در هر جعبهٔ دوستان خود را هم می‌دانم».

چه مهره‌هایی در جعبه‌های سه نفر اول باقی مانده و چه مهره‌هایی در جعبهٔ نفر چهارم قرار دارد؟

۱. دستگاه محورهای مختصات

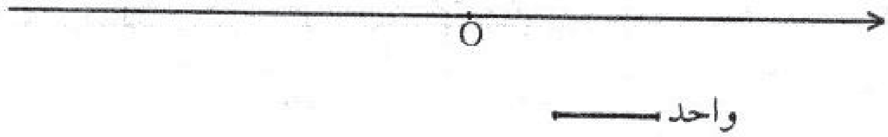
§ ۱. مختص نقطه‌ای از محور

۱. طرح مطلب. در خیابان یا کوچه، جلو خانهٔ خود ایستاده‌اید. رهگذری از شما نشانی جایی را می‌پرسد وشما پاسخ می‌دهید: «از همین جا از سوی دست راست من، ۵۰۰ متر پیش بروید، به جایی که می‌خواهید می‌رسید».

اکنون فرض کنید، در اتوبوس یا هواپیمای در حال حرکت، پهلوی کسی نشسته‌اید و او نشانی محلی را از شما می‌پرسد. اگر شما پاسخ بدهید که «از سوی دست راست من، بعد از ۵۰۰ متر، آن را پیدا می‌کنید». آیا هم سفر شما قانع خواهد شد؟ او به طور طبیعی از شما می‌پرسد: «از کجا، از کدام نقطه، باید ۵۰۰ متر بروم تا به جایی که می‌خواهم برسم؟»

برای دادن نشانی، باید نقطهٔ آغاز حرکت را مشخص کنید، بدون آن، کسی از سخن شما سر در نمی‌آورد.

یا فرض کنید، بگویید: «جای مورد نظر شما، در ۵۰۰ متری این جاست». باز هم، نشانی شما دقیق نیست. از چه سمتی باید ۵۰۰ متر برود تا به جایی که می‌خواهد، برسد؟



شکل ۴

برای دادن نشانی، باید **سوی حرکت** *را تعیین کنید.*

همچنین فرض کنید، پاسخ شما در برابر کسی که نشانی جایی را می‌پرسد، این جمله باشد: «محل مورد نظر شما در سمت راست است و تا اینجا، ۵۰۰ تا فاصله دارد». ۵۰۰ تا چی؟ ۵۰۰ گام؟ ۵۰۰ متر؟ ۵۰۰ شمارهٔ شهرداری؟

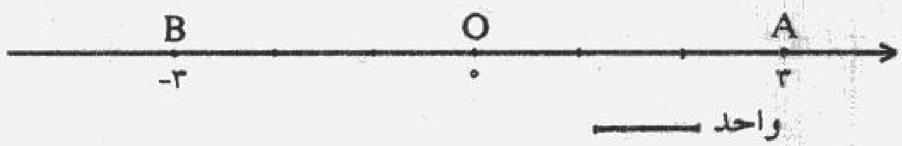
برای دادن نشانی، باید **واحد** *عددی را که می‌گویید، روشن کنید.* اگر کوچه یا خیابانی را، که از جلو خانهٔ شما می‌گذرد، یک خط راست فرض کنیم، باید روی این خط راست، نقطهٔ آغاز حرکت، سوی حرکت و واحد حرکت معین باشد تا جای دقیق نقطهٔ مورد نظر، معلوم شود.

نقطهٔ آغاز حرکت را، **مبداء**؛ سوی حرکت را، **جهت**، و واحد اندازه‌گیری را **واحد** یا **یکه** می‌گویند.

۲. **محور**. *هر خط راستی را که، روی آن، مبداء، جهت و واحد مشخص شده باشد، در ریاضیات،* **محور** *یا* **آسه** *نامیده‌اند. محور، این توانائی را به ما می‌دهد که، هر نقطه از خط راست را، با یک عدد بیان کنیم.*

شکل ۴، یک محور را نشان می‌دهد: نقطهٔ O، مبداء را نشان می‌دهد و نشانهٔ پیکان، که در انتهای راست محور گذاشته شده است، جهت را مشخص می‌کند. اندازهٔ واحد هم، به طور جداگانه، داده شده است.

ولی هنوز باید **تعریف** را دقیق‌تر کنیم. «سمت راست» و «سمت چپ»، مفهوم‌هایی ریاضی نیستند: ۳ واحد در سمت راست با ۳ واحد در سمت چپ، چه تفاوتی دارند؟ این مطلب را از قبل هم می‌دانیم: سمت راست



شکل ۵



شکل ۶

مبداء را (یا بهتر بگوییم، نقطه‌هایی از محور را که، نسبت به O، در سویِ جهت پیکان هستند) با عددهای مثبت و نقطه‌های سمت چپ مبداء را، با عددهای منفی نشان می‌دهیم.

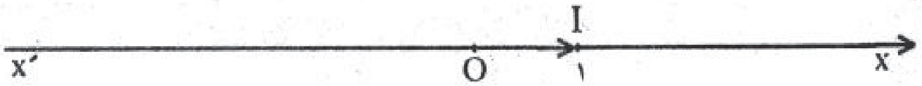
در شکل ۵، نقطهٔ A، با عدد ۳+ و نقطهٔ B، با عدد ۳− نشان داده می‌شود. نقطهٔ O (نقطهٔ آغاز یا مبداء) نمایندهٔ عدد ۰ است.

در شکل ۵، دو مزاحم دیگر وجود دارد. یکی از این مزاحم‌ها، واحد است که باید بیرون از محور نشان داده شود و دیگری علامت پیکان است که، اگر با عدد مثبت بزرگی سروکار داشته باشیم، از مرز پیکان می‌گذرد و دشواری ایجاد می‌کند.

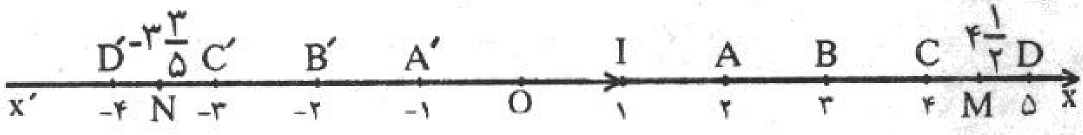
در شکل ۶، هر دو دشواری را حل کرده‌ایم. واحد را روی محور برده‌ایم و نشانهٔ پیکان را در انتهای راست آن قرار داده‌ایم.

در چنین حالتی، پاره‌خط راست OI را (مواظب باشید: OI نه IO؛ جهت مثبت را رعایت کنید)، **بردار واحد** گویند.

در شکل ۶، محور را $x'x$ یا $x'ox$ نامیده‌ایم. توجه کنید: $x'x$ (و نه xx')، در اساس یک خط راست است و، بنابراین، از هر دو سمت، بی‌پایان است؛ به همین مناسبت، بهتر است حرف‌های x' و x را زیر یا روی خط راست (و نه، در امتداد آن) بنویسیم تا خط راست (یعنی محور) بتواند تا هر



شکل ۷



شکل ۸

جا که مایل باشیم، ادامه پیدا کند. اگر x' و x را، به صورتی که در شکل ۷ دیده می‌شود، قرار دهید، ادامهٔ محور را، چه از سمت چپ (منفی) و چه از سمت راست (مثبت) دچار دشواری می‌کند.

اگر بخواهیم بردار واحد OI را، به طور جداگانه، بنویسیم، به صورت $\vec{OI}$ می‌نویسیم و اگر بخواهیم مشخص کنیم که، طول آن، برابر واحد است، می‌نویسیم:

$$|\vec{OI}| = ۱$$

یادداشت. تعریف ریاضی بُردار را، به موقع خود، در این دوره از کتاب‌ها خواهید دید؛ در این‌جا تنها با نام آن و برای بُردار واحد آشنا شده‌اید.

۳. نقطه‌های واقع بر یک محور و مجموعهٔ عددهای حقیقی. اکنون به سادگی متوجه می‌شویم که، *می‌توان مجموعهٔ عددهای حقیقی را با مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر یک محور، در تناظر یک به یک قرار داد*، یعنی، هر نقطهٔ واقع بر محور، با یک عدد حقیقی متناظر است و، برعکس، هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور است.

در شکل ۸، نقطهٔ M متناظر با عدد $+۴\frac{۱}{۲}$ و عدد $-۳\frac{۳}{۵}$ متناظر با نقطهٔ N است؛ همچنین نقطه‌های I، A، B و C، به ترتیب متناظر با عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴؛ و عددهای ۱−، ۲−، ۳− و ۴−، به ترتیب،

متناظر نقطه‌های A'، B'، C' و D' هستند.

عددی را که متناظر با نقطه‌ای از محور باشد، **طول آن نقطه** می‌نامند و با x نشان می دهند (به همین مناسبت،، محور $x'x$ را، **محور طول‌ها** یا محور x ها هم می‌گویند؛ معمول شده است که محور طول‌ها را، به صورت افقی در نظر بگیرند، ولی این، اجباری نیست و، در حالتی که ضرورت داشته باشد، می‌توان آن را به هر صورت دیگری در نظر گرفت)؛ اگر بنویسیم x_M، یعنی طولِ نقطهٔ M پس

$$x_M = ۴\frac{۱}{۲}, x_N = -۳\frac{۳}{۵}, x_B = -۲, x_I = ۱$$

و البته $x_O = ۰$.

طول یک نقطه را، **مختص** آن نقطه هم می‌نامند: مختص نقطهٔ D عبارت است از ۵ و مختص نقطهٔ D'، ۴− است (در روی شکل ۸). در ضمن، همیشه، مختص یک نقطه را، در سمت راست نام نقطه و در داخل پرانتز می‌نویسند:

$$M\left(۴\frac{۱}{۲}\right), N\left(-۳\frac{۳}{۵}\right), C(+۴), O(۰)$$

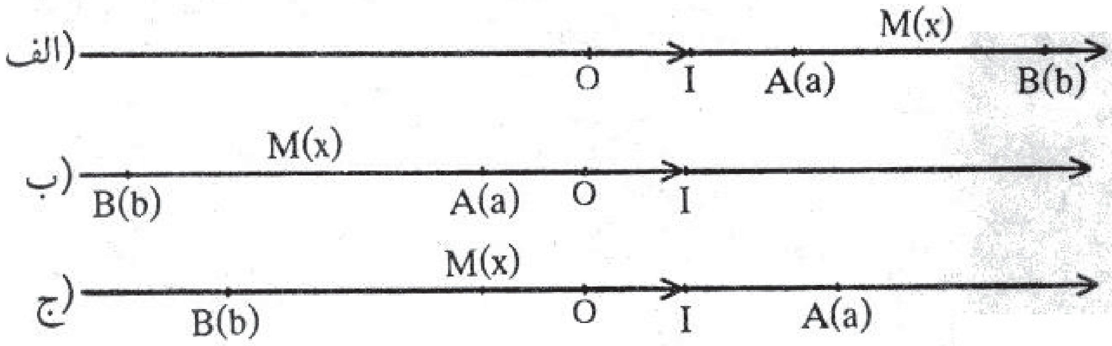
بُردار واحد را هم، گاهی با حرف e (و به صورت سیاه) نشان می‌دهند:

$$\vec{OI} = \mathbf{e}$$

۴. مختص نقطه‌ای که وسط دو نقطهٔ مفروض است. فرض می‌کنیم:

$$A(a), B(b), M(x)$$

A، B و M را روی یک محور و M را نقطهٔ وسطِ دو نقطهٔ A و B در نظر گرفته‌ایم. می‌خواهیم x را بر حسب a و b پیدا کنیم، یعنی با معلوم بودن مختص دو نقطه از یک محور، مختص نقطهٔ وسط آن‌ها را به دست آوریم.



شکل ۹

در شکل ۹، سه حالتِ ممکن، نشان داده شده است: در حالت الف، a و b مثبت؛ در حالت ب، a و b منفی و در حالت ج، a مثبت و b منفی است.

برای سادگی بحث، یک قرارداد را می‌پذیریم: *وقتی P و Q، دو نقطه از صفحه باشند، فاصلهٔ از P تا Q، یعنی اندازهٔ پاره خط راست PQ را به صورت $|PQ|$ نشان می‌دهیم.*

الف) با توجه به شکل ۹ الف، داریم:

$$\begin{cases} |OM| = |OB| - |MB| = |OB| - \frac{1}{2}|AB|, \\ |OM| = |OA| + |AM| = |OA| + \frac{1}{2}|AB| \end{cases}$$

اگر این دو برابری را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$2|OM| = |OA| + |OB| \qquad (*)$$

در این حالت، a، b و x، عددهایی مثبت‌اند، پس

$$|OM| = x, |OA| = a, |OB| = b$$

و بنابراین خواهیم داشت

$$۲x = a + b \text{ یا } x = \frac{a+b}{۲}$$

که می‌توان آن را این طور هم نوشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \qquad (۱)$$

ب) روشن است که با منفی بودن a و b، مقدار x هم منفی می‌شود. اگر شبیه حالت قبل عمل کنیم، به همان برابری (*) می‌رسیم که در آن

$$|OM| = -x, |OA| = -a, |OB| = -b$$

یعنی

$$-x = \frac{-a-b}{۲} \text{ یا } x = \frac{a+b}{۲}$$

و دوباره، همان برابری (۱) به دست می‌آید.

ج) در این حالت $a > ۰$ و $b < ۰$ و $|a| < |b|$ فرض کرده‌ایم (اگر داشته باشیم $|b| < |a|$، با روش مشابهی به نتیجه می رسد). داریم:

$$\begin{cases} |OM| = |MA| - |OA| = \frac{۱}{۲}|AB| - |OA|, \\ |OM| = |OB| - |MB| = |OB| - \frac{۱}{۲}|AB| \end{cases}$$

که از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$۲|OM| = -|OA| + |OB|$$

در این جا، با توجه به شکل داریم:

$$|OM| = -x, |OA| = a, |OB| = -b$$

و بنابراین به دست می‌آید:

$$-2x = -a - b \text{ یا } x = \frac{a+b}{2}$$

در این حالت هم، همان برابری (۱) به دست می‌آید: *برابری (۱)، دستوری کلی، برای پیدا کردن مختص وسط دو نقطهٔ معلوم است.*

۵. فاصلهٔ بین دو نقطه. روی همان شکل ۹ و با در نظر گرفتن همان سه حالت، می‌توان دستور زیر را، برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو نقطه از یک محور را (یعنی محاسبهٔ طول پاره‌خط راستی را که مختصاتِ آغاز و پایان آن معلوم است) به دست آورد:

اگر $A(a)$ و $B(b)$، آن وقت

$$|AB| = |a - b| \qquad (2)$$

مثلاً، برای حالت ج در شکل ۹ داریم:

$$|AB| = |OA| + |OB|$$

در این حالت $|OA| = a$ و $|OB| = -b$ و بنابراین

$$|AB| = a - b$$

در این جا $a - b$ مقداری مثبت است، ولی در حالت کلی (چون ممکن است، عدد b از عدد a بزرگتر باشد) باید علامت قدر مطلق را، برای $a - b$ در نظر گرفت (طول یک پاره‌خط راست، نمی‌تواند منفی باشد)؛ در این صورت $|a - b|$ با $|b - a|$ فرق نمی‌کند و، در هر دو صورت، درازای پاره‌خط راست را به ما می‌دهد.

۶. مقدار جبری پاره‌خط راست واقع بر محور. دو نقطهٔ A و B را، روی محور $x'x$ در نظر می‌گیریم. اگر جهتِ از A به B، با جهتی که

روی محور انتخاب کرده‌ایم، یکی باشد، اندازهٔ پاره‌خط راست AB را مثبت و، در غیر این صورت، منفی می‌گیریم و آن را، **مقدار جبری پاره‌خط راست** AB می‌نامیم. مقدار جبری پاره‌خط راست AB را، به صورت $\overline{AB}$ نشان می‌دهند. به این ترتیب، روشن است که

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \text{ یا } \overline{AB} + \overline{BA} = 0 \qquad (۳)$$

مقدار جبری پاره‌خط راست واقع بر محور را، می‌توان بر حسب دو مختصِ آغاز و پایان آن نوشت:

$$\overline{AB} = x_B - x_A, \overline{BA} = x_A - x_B$$

(درستی این دو برابری را، خودتان روی یک محور، آزمایش کنید؛ حالت‌های مختلف را برای جای نقطه‌های A و B نسبت به مبداء در روی محور در نظر بگیرید و، در هر حالت، درستی برابری‌ها را نتیجه بگیرید.)

*یادداشت. قضیه‌ای به نام **قضیه شال** وجود دارد که، در واقع، شکل کلی و عمومی برابری (۲) است:

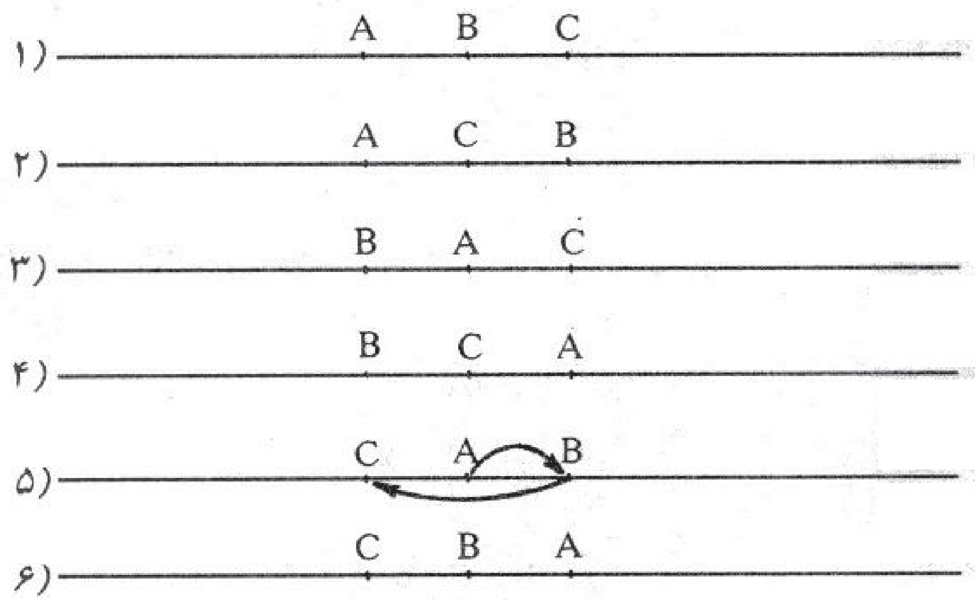
اگر نقطه‌های A، B، C، D، ...، M، K و L **را، به دلخواه، روی محور** $x'x$ **انتخاب کنیم**، همیشه داریم:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{MK} + \overline{KL} = \overline{AL}$$

که آن را به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{MK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0 \qquad (۴)$$

درستی برابری (۴) را، می‌توان این طور مجسم کرد: اگر از نقطهٔ A آغاز کنیم، ابتدا در جهت از A به B، بعد در جهت از B به C و غیره حرکت



شکل ۱۰

کنیم تا به نقطهٔ L برسیم و، سرانجام در جهت از L به A پیش برویم، در پایان حرکت، به همان نقطهٔ آغاز A می‌رسیم؛ مثل این که از A حرکتی نکرده‌ایم.

ولی این قضیه را می‌توان با دقت ریاضی، ثابت کرد.

اول، قضیه را برای حالتی که با سه نقطه سرو کار داریم، ثابت می‌کنیم. برای سه نقطه‌ای که روی یک محور باشند، یکی از شش حالت ممکن است پیش آید؛ سه نقطه را A، B و C نامیده‌ایم و این شش حالت را روی شکل ۱۰ نشان داده‌ایم (برای سادگی کار، مبداء و جهت و واحد را روی شکل‌ها نیاورده‌ایم، زیرا در استدلال ما، اثری ندارد).

برای هر یک از این شش حالت، با توجه به شکل روشن است:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

(در حالت ۵، این نتیجه را روی شکل نشان داده‌ایم) و یا

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

اکنون، برای اثبات قضیهٔ شال، وقتی با ۴ نقطهٔ A، B، C و D سروکار داشته باشیم، نیازی به رسم شکل نداریم: برای سه نقطهٔ A، B و C می‌دانیم:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

بنابراین

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}=$$
$$=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD}$$

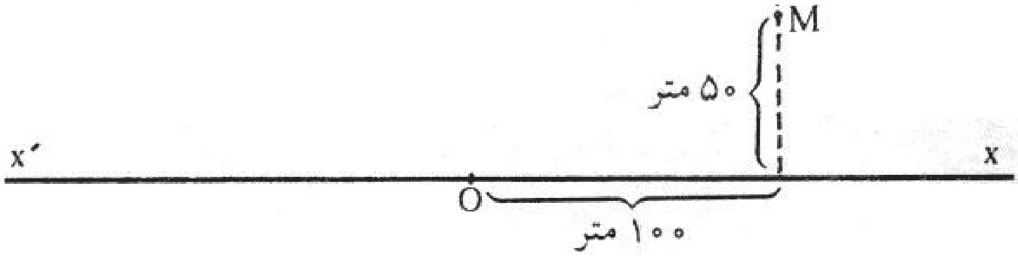
و یا

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0$$

به همین ترتیب، درستی قضیه برای ۵ نقطه، به کمک درستی آن برای ۴ نقطه ثابت می‌شود تا جایی که، برابری شال، برای n نقطهٔ واقع بر محور به دست آید.

§ ۲. مختصات نقطهٔ واقع بر صفحه

۱. طرح مطلب. دوباره به موضوع «آدرس» برگردیم. رهگذر، از شما که در جایی ایستاده‌اید، نشانی محلی را می‌پرسد، ولی محل مورد نظر او، در همان خیابانی که شما در آن ایستاده‌اید، نیست. به عنوان مثال پاسخ می‌دهید: «از همین جا، ۱۰۰ متر به سمت راست من بروید، بعد به طرف شمال بپیچید و، در خیابانی که عمود بر همین خیابان است، ۵۰ متر حرکت



شکل ۱۱

کنید، به محل مورد نظرتان می‌رسید. به شکل ۱۱ توجه کنید: O جای ملاقات شما با رهگذر و M، نقطهٔ مورد نظر اوست.

برای دادن نشانی نقطهٔ M، از دو «جهت» (به طرف شرق و به طرف شمال) و از دو عدد (۱۰۰ و ۵۰) استفاده کرده‌اید.

نقطهٔ M روی محور $x'x$ (خیابانی که در آن، جلو منزل خود ایستاده‌اید) نیست. بنابراین، برای تعیین محل آن، یک محور کافی نیست و ناچارید از دو محور استفاده کنید.

۲. محورهای مختصات در صفحه. اگر روی صفحه، دو محور را، با این شرط‌ها انتخاب کنید:

۱) مبداء آن‌ها، یکی باشد؛

۲) بر هم عمود باشند؛

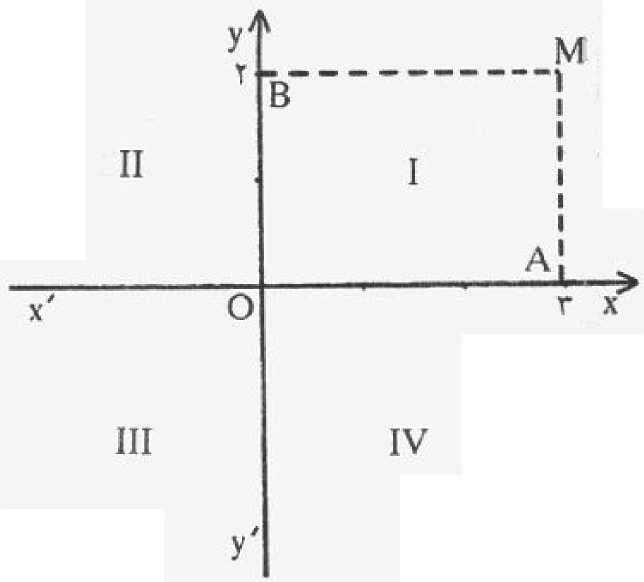
۳) اندازهٔ واحد، برای دو محور، یکی باشد.

آن وقت، با یک دستگاه محورهای مختصات سروکار دارید (شکل ۱۲).

به چند نکته توجه کنید:

الف) معمول است که محورهای مختصات را به صورت افقی و قائم رسم می‌کنند، ولی این، تنها برای سادگی کار است و، در صورت لزوم، می‌توانند به هر صورتی که مورد نیاز است، باشند (شکل ۱۳)؛

ب) عمود بودن دو محور نسبت به هم، باز هم برای سادگی محاسبه‌هاست. در حالت کلی، و اگر در جایی ضرورت پیدا کند، می‌توان دو محور را، نسبت



شکل ۱۲

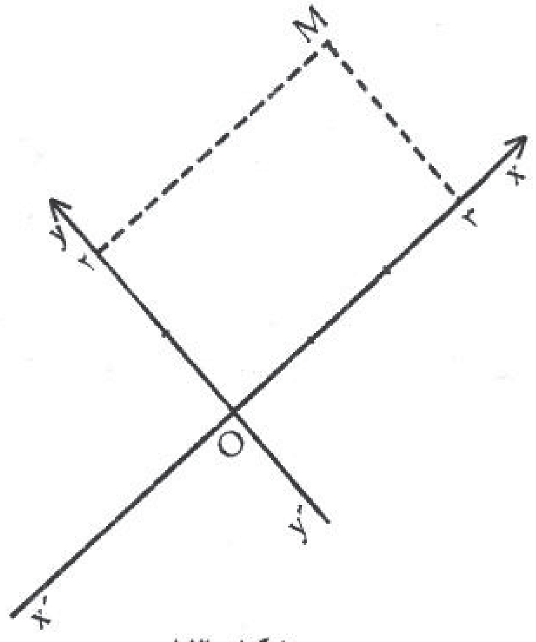
به هم، مایل در نظر گرفت (شکل ۱۴)، ولی در این صورت، محاسبه‌ها و رابطه‌ها، پیچیده‌تر و کار محاسبه دشوارتر می‌شود.

در این کتاب، همه جا، محورها را افقی و قائم و، بنابراین عمود بر هم، در نظر می‌گیریم و، به همین مناسبت، دستگاه را، **دستگاه محورهای مختصات قائم** می‌نامیم؛

ج) برای این که شکل ساده‌تر باشد، جهت هر محور را، در جایی روی محور نشان می‌دهیم و از نشان دادن بُردار واحد (مگر در موردی که ضروری باشد) صرف نظر می‌کنیم؛

د) اندازهٔ واحد، اختیاری است و، بسته به موقعیت و بُعدهای کاغذ، انتخاب می‌شود؛ ولی در هر حال، بهتر است، اندازهٔ واحد را، در دو محور، برابر یکدیگر در نظر بگیریم. در حالتی که، ناچار باشیم، طول بُردار واحد را، در یک محور، کوچکتر یا بزرگتر از طول بُردار واحد در محور دیگر انتخاب کنیم، باید این موضوع را ذکر و نسبت دو طول را یادآوری کنیم.

هـ) جهت مثبت را روی محور افقی، از مبداء به طرف راست و روی



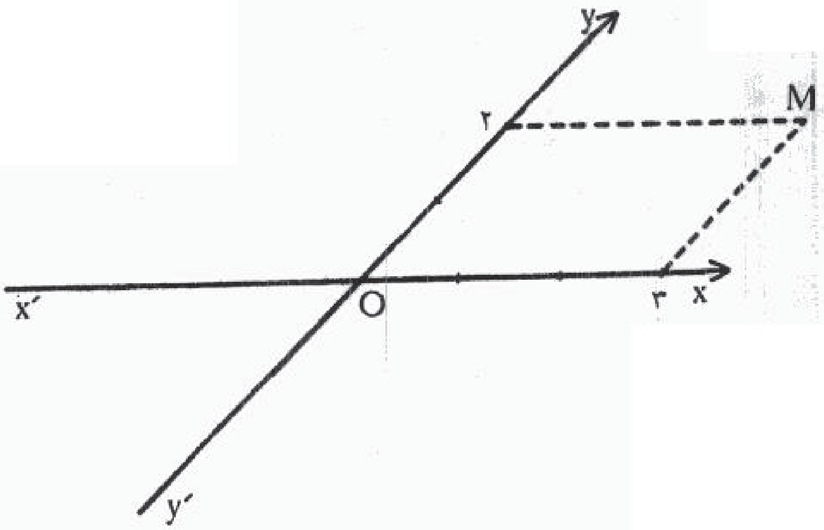
شکل ۱۳

محور قائم، از مبداء به سمت بالا می‌گیریم.

در حالتی که، محورها، افقی و قائم نیستند، باید جهت‌ها را طوری انتخاب کرد که، اگر نیم خط راست ox را بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور نقطهٔ O دوران دهیم، بعد از یک دوران ۹۰ درجه، روی نیم‌خط راست oy قرار گیرد که، در این صورت، اگر نیم خط راست ox، به اندازهٔ ۳۶۰ درجه، دور نقطهٔ O و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دوران کند، از چهار بخش صفحه (که به وسیلهٔ دو محور به وجود آمده‌اند) می‌گذرد و، به ترتیب، آن‌ها را یک چهارم (یا رُبع) اول، یک چهارم (یا رُبع) دوم، یک چهارم (یا رُبع) سوم و یک چهارم (یا رُبع) چهارم دستگاه محورهای مختصات می‌نامیم (در شکل ۱۲، این رُبع‌ها را، با عددهای رومی I، II، III و IV نشان داده‌ایم).

۳. **مختصات یک نقطه.** با توجه به آن چه گفتیم، می‌توانیم جای هر نقطه از صفحهٔ مختصات را (یعنی صفحه‌ای که با یک دستگاه محورهای مختصات قائم مشخص شده است) به کمک دو عدد مشخص کنیم.

به شکل ۱۲ توجه کنید: اگر از نقطهٔ M، عمودهای MA و MB را



شکل ۱۴

به دو محور رسم کنیم، نقطهٔ A به مختص ۳+ و نقطهٔ B به مختص ۲+ به دست می‌آید؛ ۳+ و ۲+ را مختص‌های (یا مختصاتِ) نقطهٔ M گوییم و آن را این طور می‌نویسیم:

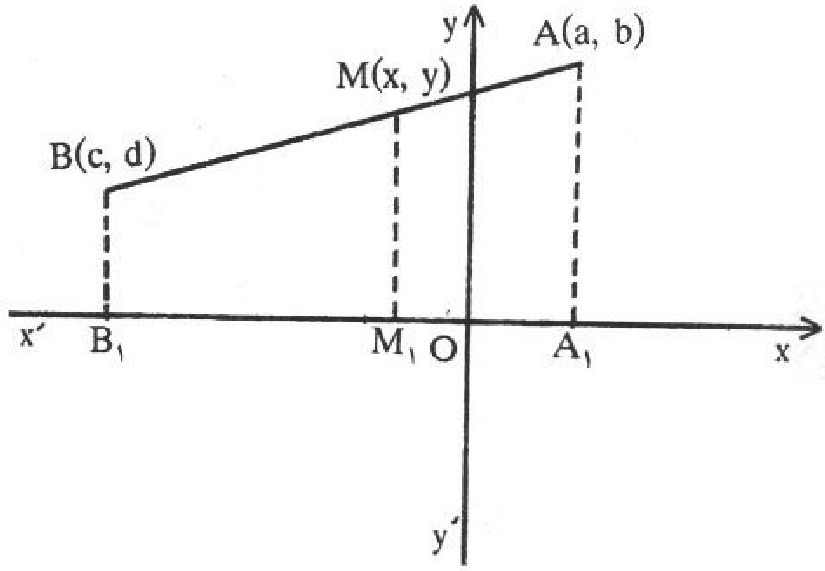
$$M(+۳, +۲) \text{ یا } M \left| \begin{array}{l} +۳ \\ +۲ \end{array} \right.$$

۳ را طول و ۲ را عرض نقطهٔ M نامیده‌اند. در نوشتن مختصات یک نقطه، اول طول و، سپس، عرض آن را بنویسید. نقطه‌های A و B هم، در دستگاه مختصات شکل ۱۲، با دو عدد معرفی می‌شوند:

$$A(+۳, ۰) \text{ یا } A \left| \begin{array}{l} +۳ \\ ۰ \end{array} \right. ; B(۰, +۲) \text{ یا } B \left| \begin{array}{l} ۰ \\ +۲ \end{array} \right.$$

نقطه‌های واقع بر محور طول (یعنی $x'x$) عرضی برابر صفر دارند؛ همچنین، طول هر نقطهٔ واقع بر محور عرض (یعنی $y'y$) برابر صفر است. هر دو مختص مبداء مختصات، برابر صفر است:

$$O(۰, ۰) \text{ یا } O \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۰ \end{array} \right.$$



شکل ۱۵

یادداشت. وقتی می‌نویسیم $A(-۲,۷)$، ۲− را طول و ۷ را عرض نقطهٔ A می‌گوییم (گاهی هم می‌گویند: ۲− ایکسِ A و ۷ ایگرگِ A است)؛ ولی باید مواظب بود که واژه‌های «طول» و «عرض»، در این جا، با معنای معمولی آن‌ها، مثل «طول اتاق»، «طول پاره‌خط راست»، «عرض پارچه» و غیره، فرق دارد. در این جا، «طول» و «عرض» به معنای «دو مختص» نقطه است. به همین مناسبت، شاید بهتر باشد، به جای این دو واژه، از واژه‌های فارسی «خفت» و «رُست» استفاده شود تا از اشتباه احتمالی، جلوگیری شده باشد.

۴. محاسبهٔ مختصات وسط پاره‌خط. نقطهٔ $A(a,b)$ را در نظر می‌گیریم. AB یک پاره‌خط راست است. نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB را M می‌نامیم. می‌خواهیم، با معلوم بودن مختصات دو نقطهٔ A و B، مختصات نقطهٔ M را پیدا کنیم. مختصات M را x و y فرض می‌کنیم:

$$A(o,b), B(c,d), M(x,y)$$

با توجه به شکل ۱۵، برای محور $x'x$ (بدون توجه به محور قائم) داریم:

$$A_{۱}(a), B_{۱}(c), M(x)$$

و چون M وسط $A_{۱}B_{۱}$ است، پس

$$x = \frac{a+c}{۲}$$

به همین ترتیب، اگر از A و B و M، عمودهایی بر محور $y'y$ فرود آوریم، به سادگی به دست می‌آید:

$$y = \frac{b+d}{۲}$$

یعنی، اگر M، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB باشد، برای دو مختص (یعنی مختصاتِ) نقطهٔ M داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}, y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

۵. طول پاره‌خط راست در صفحه. شکل ۱۶، همه چیز را به روشنی نشان می‌دهد: اگر داشته باشیم:

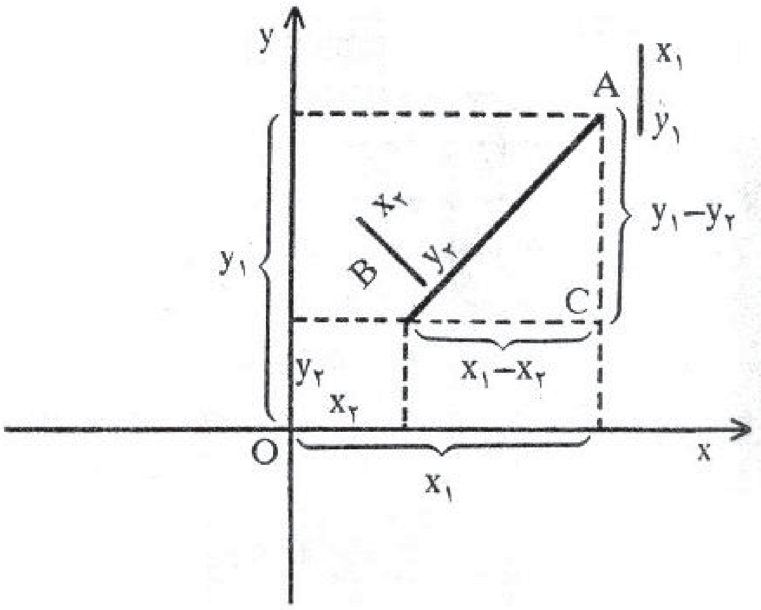
$$A(x_{۱}, y_{۱}) \text{ و } B(x_{۲}, y_{۲})$$

با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، خواهیم داشت:

$$|AB|^{۲} = (x_{۱} - x_{۲})^{۲} + (y_{۱} - y_{۲})^{۲}$$

و یا

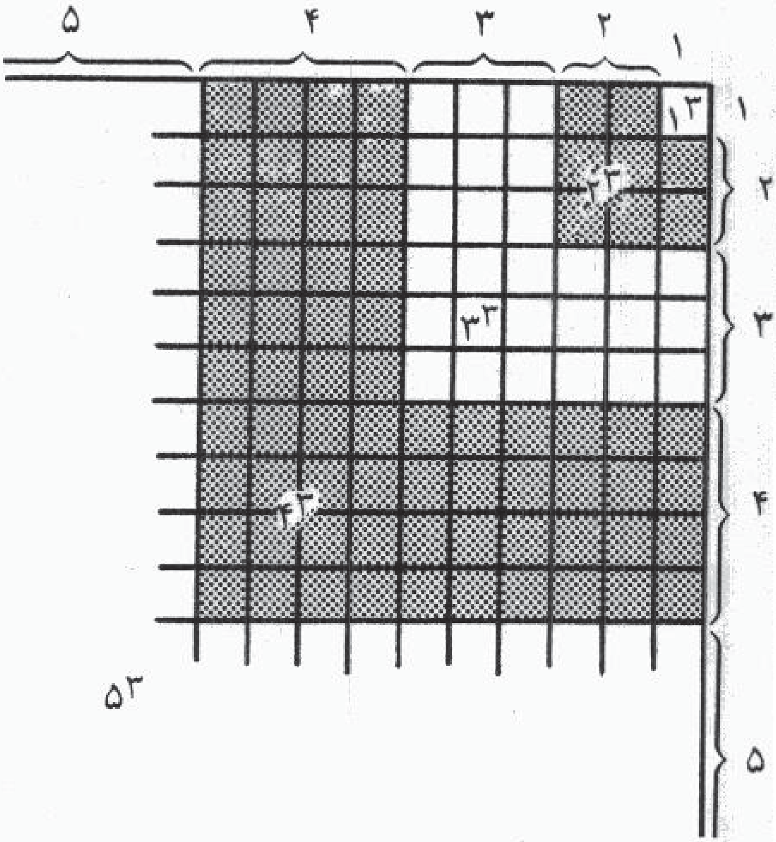
$$|AB| = \sqrt{(x_{۱} - x_{۲})^{۲} + (y_{۱} - y_{۲})^{۲}}$$



شکل ۱۶

* § ۳. مختصات در گذر تاریخ

۱. در جلد اول (از جمله، در صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۸۸) اشاره کرده بودیم که ریاضی‌دانان یونانی، زیر تاثیر نظام اجتماعی حاکم بر آن‌ها، ریاضیات محاسبه‌ای را حقیر می‌شمردند و بیشتر با هندسه کار می‌کردند. در حالت‌هایی هم که به رابطه‌ای یا مساله‌ای از «حساب» یا «جبر» برمی‌خوردند، تلاش می‌کردند آن را به کمک شکل‌های هندسی نشان دهند و یا حل کنند. آن‌ها عدد را به عنوان طول یک پاره‌خط راست، مجذور عدد را به عنوان مساحت مربعی که، طول ضلع آن، برابر آن عدد باشد، توان سوم یک عدد را به عنوان حجم مکعبی با ضلع به طول آن عدد، حاصل ضرب دو عدد را به عنوان مساحت یک مستطیل و ... در نظر می‌گرفتند. هنوز هم ما، a^2 را، مربع a و a^3 را مکعب a می‌گوییم. یونانی‌ها، حاصل ضرب ab را هم، مستطیل ab می‌نامیدند.



شکل ۱۷

ریاضی‌دانان ایرانی، با آن که خود «ریاضیات محاسبه‌ای» را، به صورت منطقی، پدید آوردند و در طول زمان تکامل دادند، هرگز نتوانستند خود را از زیر تاثیر این روحیهٔ یونانی‌ها آزاد کنند و همیشه می‌کوشیدند، برای استدلال‌های «جبری» خود، به هندسه هم متوسل شوند.

مثالی بیاوریم. در آخرین مسالهٔ جلد اول (مسالهٔ ۲۴۶)، رابطهٔ جالبی پیدا کردیم، که بنابر آن:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + n^۳ = (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n)^۲$$

همین برابری را، ریاضی‌دانان ایرانی هم ثابت کرده‌اند، ولی نه با محاسبه، بلکه به کمک شکل.

به شکل ۱۷ توجه کنید؛ بخشی از یک مربع را که طول ضلع آن، برابر

$$۱+۲+۳+۴+۵+\ldots+n$$

است، به مربع‌های کوچک به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم. مساحت تمامی مربع بزرگ، برابر است با

$$(۱+۲+۳+\ldots+n)^۲ \qquad (۱)$$

همین مربع را به بخش‌هایی، شبیه L، تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را، یک در میان هاشور زده‌ایم. مربع سفید گوشهٔ راست و بالا، مساحتی برابر ۱ (یا $۱^۳$) دارد. بخش بعدی (که هاشور خورده است) شامل ۸ مربع است و، بنابراین، مساحت آن برابر ۸ (یا $۲^۳$) است. بخش سوم که سفید است، مساحتی برابر ۲۷ (یا $۳^۳$) دارد. زیرا شامل ۲۷ مربع است. به همین ترتیب، بخش‌های بعدی، مساحت‌هایی برابر $۴^۳$، $۵^۳$، ...، $n^۳$ دارند؛ یعنی مساحت تمامی مربع بزرگ، برابر است با

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳+\ldots+n^۳ \qquad (۲)$$

عبارت‌های عددی (۱) و (۲)، معرف یک مقدار (مساحت مربع بزرگ) هستند و بنابراین

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳=(۱+۲+۳+\ldots+n)^۲$$

به این ترتیب، در طول تاریخ، و از همان آغاز پیدایش ریاضیات استدلالی، رابطه‌ای استوار، بین ریاضیات محاسبه‌ای و هندسه وجود داشته است.

۲. ولی حل مساله‌های ریاضیات محاسبه‌ای، به یاری هندسه، دشواری‌هایی را به وجود می‌آورد که هم موجب پدید آمدن عدم دقت‌هایی در کار محاسبه می‌شد و هم، تا حد زیادی، راه پیشرفت ریاضیات را سد می‌کرد.

نخستین دشواری از این‌جا ناشی می‌شود که، در هندسه، با پاره‌خط‌های راست سرو کار داریم و، پاره‌خط راست، طولی مثبت دارد. بنابراین، اگر در مساله‌ای، بخواهیم جواب یا جواب‌های منفی را پیدا کنیم، اغلب نمی‌توان از چنان روش هندسی استفاده کرد که،عددهای منفی را هم به ما بدهد. هندسه، در حالت عادی، همه‌جا، با عددهای مثبت سروکار دارد.

دشواری دوم، مربوط به تقریبی بودن جواب است. وقتی جواب یک مساله را، به صورت یک پاره‌خط راست یا مقدار مساحت یک شکل به دست آوریم، در واقع، به یک عدد دقیق نرسیده‌ایم. طول پاره‌خط راست، یا مساحت یک شکل را، باید اندازه گرفت و، اندازه‌گیری، همیشه همراه با اشتباه است و جواب را به تقریب به ما می‌دهد.

دشواری سوم، به تعبیر هندسی عددهای a، a^2، a^3، ... مربوط می‌شود. وقتی قرار باشد، a^2 را مساحت مربعی به ضلع a، و a^3 را حجم مکعبی به ضلع a در نظر بگیریم، آن وقت دیگر برای توان‌های بالاتر a، مثل a^4 و a^5 و ...، نمی‌توانیم معنایی هندسی پیدا کنیم، زیرا فضای فیزیکی ما سه بُعد دارد و فضاهای پنج بُعدی و شش بُعدی و غیر آن، بی معنا می‌شود.

۳. ریاضی‌دانان قدیم (از آغاز تا سدهٔ ۱۷ میلادی)، به عدد و شکل، به صورت چیزهایی ثابت و بی تغییر نگاه می‌کردند. از دیدگاه آن‌ها، مساله‌ای را می‌شد مسالهٔ ریاضی به حساب آورد، که جوابی معین و ثابت داشته باشد، به زبان دیگر، مفهوم حرکت را، که از ویژگی‌های طبیعت است و، بدون در نظر گرفتن آن، هیچ پدیدهٔ طبیعی را نمی‌توان توضیح داد، به ریاضیات راه نداده بودند. فیثاغورث و هواداران او، خط و، از جمله خط راست را، شامل تعداد معینی نقطهٔ به هم چسبیده می‌دانستند؛ به اعتقاد آن‌ها، خط راست از کنار هم گذاشتن تعدادی نقطه به دست می‌آید، نه از حرکت یک نقطه در یک راستا (تعریف اخیر، یعنی پذیرفتن خط راست، به عنوان حرکت یک نقطه، برای نخستین بار و البته تا حدی نا روشن ـ در نوشته‌های خیام دیده

می‌شود). بنابراین، وقتی مثلاً با معادلهٔ دو مجهولی

$$y = ۲x + ۳ \qquad (*)$$

رو به رو می‌شدند، به جست‌و جوی معادلهٔ دومی بودند تا، به یاری دو معادله بتوانند مقدارهای مشخص و ثابتِ x و y را به دست آورند؛ و اگر این معادلهٔ دوم وجود نداشت، از معادله (*) هم صرف نظر می‌کردند، زیرا به کمک آن، نمی‌شد «چیزی مشخص» را به دست آورد. این که x و y، هر دو، مقدارهایی متغیرند، ولی تغییر یکی موجب تغییر دیگری می‌شود، موضوع جالبی برای آن‌ها نبود. ریاضی‌دانان باستانی به مقدارها و کمیت‌های ثابت علاقه‌مند بودند، نه کمیت‌های متغیر؛ به همین مناسبت، اغلب، ریاضیات پیش از سدهٔ هفدهم میلادی را، **دوران ریاضیات با کمیت‌های ثابت** نامیده‌اند.

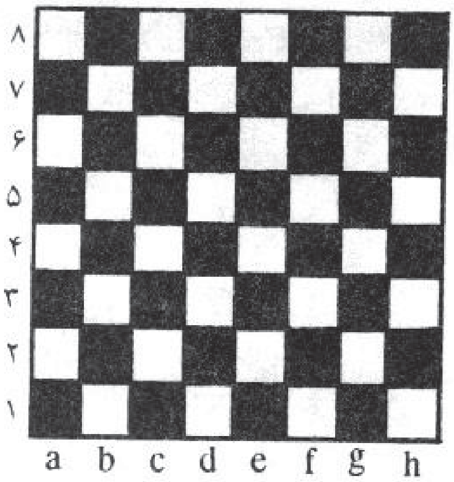
در حالی که قانون‌های حاکم بر طبیعت و جامعه را، بدون وارد کردن کمیت‌های متغیر نمی‌توان شناخت. حرکت و تغییر در ذات طبیعت و از ویژگی‌های جامعه است. به قول انگلس، فیلسوف سدهٔ ۱۹ آلمان، «حرکت، شیوهٔ وجود و طریق هستی ماده است. هرگز در هیچ مکانی، مادهٔ بدون حرکت نبوده و نمی‌تواند باشد». ریاضیات، زبان طبیعت و وسیلهٔ شناسایی آن است و، روشن است که «زبان طبیعت» نمی‌تواند با ویژگی اصلی طبیعت، یعنی حرکت و تغییر، ناسازگار باشد. ولی در طول تاریخ دراز انسان، باید تا سدهٔ ۱۷ میلادی انتظار کشید که، «ریاضیات با کمیت‌های ثابت»، جای خود را به «دوران ریاضیات با کمیت‌های متغیر» بدهد و، در این راه، ریاضی‌دانانی چون پاسکال، روبروال، فرما، دکارت و کاوالیه پیشگام بودند و، سپس، نیوتون و لایب‌نیتس معمار واقعی آن.

و درست از همین زمان (یعنی از زمانی که ریاضیات، با قانون‌های حاکم بر طبیعت سازگار شد)، حرکت توفانی دانش آغاز شد و با شتابی روز افزون، دشواری‌ها را از پیش پا برداشت و به جایی رسید که امروز شاهد آن هستیم.

۴. ساده‌ترین مفهوم در حساب، **عدد** و ساده‌ترین مفهوم هندسی، **نقطه** است. بنابراین، اگر بنا باشد رابطه‌ای بین جبر و هندسه برقرار شود، باید از همین ساده‌ترین مفهوم‌ها آغاز کنیم. و این رابطه، ولو به طور پنهانی، همیشه وجود داشته است.

وقتی با اتومبیل، از شهری به شهر دیگر می‌روید، تابلوهایی به شما نشان می‌دهند، در چند کیلومتری شهر مورد نظر خود هستید. روی تابلو، نوشته شده: «تهران ـ ۵۰ کیلومتر». یعنی اگر تهران را مبداء فرض کنیم، نقطه‌ای که تابلو در آن‌جا قرار گرفته، با عدد ۵۰ مشخص شده است. هر نقطه از جاده با عددی متناظر است و، اگر جاده را مستقیم فرض کنیم، این تناظر نقطه‌ها با عددها، همان چیزی است که دربارهٔ محور دیده‌ایم. با دستگاه محورهای مختصات هم، در زندگی روزانه سروکار داریم. شکل ۱۸ یک صفحهٔ شطرنج را نشان می‌دهد. ستون‌ها، یعنی خانه‌های قائم، از چپ به راست، با حرف‌های لاتینی a، b، c، d، e، f، g و h و سطرها، یعنی خانه‌های افقی، از پایین به بالا با عددهای از ۱ تا ۸ شناخته می‌شوند. بنابراین، اگر کسی بگوید «مهره‌ای که در خانه $e - ۳$ واقع است»، شما متوجه می‌شوید که باید خانه‌ای را پیدا کنید که در محل برخورد ستون e با سطر ۳ قرار دارد. در واقع، مختصات این خانه، عبارت است از $(e, ۳)$: خانهٔ به طول e و عرض ۳. همچنین، معنای جملهٔ «حرکت مهره از $b - ۳$ به $b - ۴$» برای شما روشن است و می‌فهمید، مهرهٔ شطرنج، از چه خانه‌ای به چه خانه‌ای رفته است!

اندیشهٔ مختصات را، بر روی تصویرهایی که روی دیوارهای مقبره‌ها یا معبدهای مصر باستان، باقی مانده است، می‌توان پیدا کرد. روی این تصویرها، که صفحه را شبیه کاغذ شطرنجی به مربع‌هایی تقسیم و جای نقطه‌هایی را روی آن مشخص کرده است، به روشنی اندیشهٔ مختصات، یعنی تناظر هر نقطه از صفحه با دو عدد، دیده می‌شود.



شکل ۱۸

از گذشته‌های دور، نوجوانی که می‌خواست تمرین نقاشی کند و چهرهٔ کسی را از روی تصویر آمادهٔ او (و امروز، عکس او) بکشد، به طور معمول از این روش استفاده می‌کرد که، عکس را، به کمک خط‌های راست موازی، به مربع‌هایی تقسیم کند و در صفحهٔ کاغذ خود، که به همان طریق «مربع‌بندی» شده بود، چهرهٔ مورد نظر را منتقل کند.

اندیشهٔ مختصات، به صورت دیگری، از روزگار باستان در جغرافی و اختر شناسی هم به کار می‌رفت. مفهوم‌های «طول و عرض جغرافیایی»، که بیش از دو هزار سال پیش در نوشته‌های هیپارک (سدهٔ دوم پیش از میلاد) و بطلمیوس (سدهٔ دوم بعد از میلاد) به کار می‌رفت. تنها تفاوت طول و عرض جغرافیایی با طول و عرض یک نقطه در دستگاه محورهای مختصات، در این است که، در جغرافی، محورها عبارتند از دایره‌های عظیمه‌ای واقع بر کرهٔ زمین. همچنین، اختر شناسان از همان دوران باستان، برای نشان دادن جای ستارگان، از دستگاه مختصات فضایی (که دارای سه محور است) استفاده می‌کردند.

در سدهٔ هفدهم میلادی، پیشرفت‌های جدی در اختر شناسی، مکانیک و صنعت (که در اروپای غربی آغاز شده بود)، ضرورت وجود دستگاه

محورهای مختصات را، به صورتی منظم و قانون‌مند، به وجود آورد. نخستین کسی که، این اندیشه را، به صورتی منظم ارائه داد، پیر فرما، ریاضی‌دان فرانسوی بود؛ ولی کار اصلی با رِنه دکارت، هم میهن فرما بود که با انتشار کتاب «هندسهٔ» خود در سال ۱۶۳۷ میلادی، دستگاه مختصات را، کم و بیش به صورت امروزی آن (و البته، با در نظر گرفتن تنها یک محور) وارد در ریاضیات کرد. این، شاخهٔ تازه‌ای از ریاضیات بود که می‌توانست، مساله‌های هندسی را با زبان جبر بیان کند و آن‌ها را با روش جبری (یعنی محاسبه) حل کند و به همین مناسبت است که نام این شاخهٔ تازهٔ ریاضیات را «هندسهٔ تحلیلی» گذاشتند.

این نکته را هم اضافه کنیم که «هندسهٔ تحلیلی» انگیزه‌ای برای پیشرفت جبر هم شد. جبر، به طور جدی، به نمادهای حرفی نیاز داشت. لازم بود، برای عدد، برای مجهول (در واقع، متغیر) و برای مفهوم‌های دیگر جبر، نمادهایی در نظر گرفته شود و، این نمادها هم، به طور عمده، به وسیلهٔ ریاضی‌دانان فرانسوی (ویت، فرما و دکارت) در جبر، و به ویژه در «هندسهٔ تحلیلی» به کار برده شد.

تمرین‌ها

۴۳. نقطهٔ $M(-۳)$ را روی محور عددی مشخص کنید؛ سپس، مختص دو نقطهٔ A و B را طوری پیدا کنید که، فاصلهٔ هر کدام از آن‌ها تا نقطهٔ M، برابر ۵ واحد باشد.

۴۴. از دو نقطهٔ $M(a)$ و $N(-a)$، کدام در سمت راست دیگری است؟ [محور را افقی و جهت مثبت را، طبق معمول، از چپ به راست بگیرید.]

۴۵. از دو نقطه، کدام سمت راست دیگری است:

الف) $A(x)$ یا $B(۲x)$؛

ب) $C(a)$ یا $D(a+۲)$؛

ج) $M(x)$ یا $N(x^۲)$؛

د) $P(x)$ یا $Q(x-a)$؟

۴۶. نقطه‌هایی از محور را مشخص کنید، که برای آن‌ها داشته باشیم:
الف) $x \geq ۳$؛ ب) $x < ۱$؛ ج) $-۴ \leq x < ۲$؛ د) $x^۲ \leq ۱$؛
ه) $x^۲ > ۱$؛ و) $|x| \geq ۲$؛ ز) $۳ \leq |x| \leq ۵$

۴۷. الف) اگر $A(۵)$ و $B(-۱)$، مفروض باشند، قرینهٔ نقطهٔ A را، نسبت به نقطهٔ B پیدا کنید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ $M\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ را، نسبت به نقطه $B\left(\frac{۳}{۴}\right)$ پیدا کنید.

۴۸. مختص نقطه‌ای از محور، به صورت $\frac{|a|}{a}$ داده شده است. جای این نقطه را، در روی محور عددی، پیدا کنید.

۴۹. برای چه نقطه‌هایی از محور عددی داریم.

$$|x-۱| = ۱-x$$

۵۰. اگر در روی محور عددی، نقطهٔ A به مختص ۵ و طول پاره‌خط راست AB کوچکتر از ۳ باشد، مختص B چیست؟

۵۱. نقطه‌ای واقع بر محور عددی پیدا کنید که فاصله آن تا نقطهٔ $B(-۳)$، دو برابر فاصلهٔ آن تا $A(-۹)$ باشد.

۵۲. می‌دانیم فاصلهٔ از نقطهٔ $A(۲)$ با نقطهٔ B برابر ۷ واحد است. مختص نقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید.

۵۳. $A(۱)$ و $B(-۵)$ داده شده است. می‌دانیم نقطهٔ C، بین دو نقطهٔ A و B واقع است و در ضمن $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{۱}{۲}$. مختص نقطهٔ C را پیدا کنید.

*۵۴. $A(x_۱)$ و $B(x_۲)$ داده شده است. نقطهٔ C بین دو نقطهٔ A و B واقع است و می‌دانیم $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{m}{n}$. مختص نقطهٔ C را پیدا کنید.

۵۵. قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲,۳)$ را الف) نسبت به محور طول‌ها؛ ب) نسبت به محور عرض‌ها؛ ج) نسبت به مبداء مختصات پیدا کنید.

۵۶. نقطهٔ $M(۲,-۴)$ داده شده است. بنا به ضرورت، محور x را به جای محور y، و محور y را به جای محور x گرفته‌ایم. مختصات نقطهٔ A در دستگاه تازه چیست؟

۵۷. نقطه‌های $A(۳,۰)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۱,۴)$ داده شده است. مثلث ABC را در دستگاه محورهای مختصات رسم و مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌های آن را پیدا کنید.

۵۸. نقطه‌های $A(۴,۱)$، $B(۳,۵)$، $C(-۱,۴)$ و $D(۰,۰)$ داده شده است. الف) چهار ضلعی $ABCD$ را رسم و ثابت کنید، یک مربع است؛ ب) A' را روی ضلع AB، B' را روی ضلع BC؛ C' را روی ضلع CD و D' را روی ضلع DA طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\frac{|AA'|}{|A'B|} = \frac{|BB'|}{|B'C|} = \frac{|CC'|}{|C'D|} = \frac{|DD'|}{|D'A|} = \frac{۱}{۲}$$

آیا چهار ضلعی $A'B'C'D'$ هم مربع است؟

۵۹. $A \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۴ \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix} \right.$، دو انتهای قطر مربعی را مشخص می‌کنند. مختصات دو راس دیگر مربع را پیدا کنید.

۶۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC، در راس A قائمه است و می‌دانیم: $A(۳,۱)$ و $B(۰,۳)$، مختصات راس C را پیدا کنید.

*۶۱. قرینهٔ نقطه‌های $A(۲,۱)$ و $B(-۳,۲)$ را، الف) نسبت خط راست نیمساز ربع اول و سوم؛ ب) نسبت به خط راست نیمساز ربع دوم و چهارم پیدا کنید.

*۶۲. نقطه‌های $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix} x_۲ \\ y_۲ \end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix} x_۳ \\ y_۳ \end{matrix}\right.$ داده شده‌اند.

الف) چگونه می‌توان تحقیق کرد، آیا سه نقطهٔ A و B و C، روی یک خط راست قرار دارند یا نه؟

ب) در حالتی که سه نقطهٔ A و B و C، روی یک خط راست باشند، چگونه می‌توان تحقیق کرد، کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر واقع است؟

۶۳. $A(۴, ۳)$، $C(۱, ۲)$ داده شده است. اگر چهار ضلعی $OABC$ متوازی‌الاضلاع باشد، مختصات راس B را پیدا کنید (O، مبداء مختصات است).

*۶۴. $A(۰, ۰)$ و $B(۲, ۰)$ مفروض‌اند. می‌دانیم پاره‌خط راست AB، یک ضلع از شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ است. مختصات راس‌های دیگر این شش ضلعی را پیدا کنید، به شرطی که راس C در ربع اول باشد.

۶۵. مرکز یک مربع در نقطهٔ $F(۳, -۱)$ قرار دارد و $A(-۱, ۲)$ یکی از راس‌های آن است. مختصات سه راس دیگر مربع را پیدا کنید.

۶۶. در یک لوزی، طول یکی از ضلع‌ها برابر $\sqrt{۵}$ و نقطه‌های $A(-۱, ۳)$ و $C(-۲, ۴)$، دو انتهای یک قطر آن هستند. مختصات دو راس دیگر لوزی را پیدا کنید.

۶۷. دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} -۲ \\ ۴ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$ داده شده، نقطهٔ M بین دو نقطهٔ A و B واقع است و می‌دانیم:

$$|MA| : |MB| = ۱ : ۲$$

مختصات نقطهٔ M را پیدا کنید.

*۶۸. نقطهٔ M بین دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_۲ \\ y_۲ \end{matrix}\right.$ واقع است و

می‌دانیم:

$$|MA| : |MB| = m : n$$

مطلوب است مختصات نقطهٔ M.

۶۹. جای نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

الف) $x = -2$؛ ب) $y = 1$؛ ج) $y = x$؛ د) $x + y = 0$.

(منظور از x و y، طول و عرض، یعنی مختصات نقطه است.)

۷۰. $O(0, 0)$، $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$، سه راس یک مثلث‌اند. مساحت مثلث OAB را پیدا کنید.

۷۱. نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-2\\-3\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ داده شده‌اند. ثابت کنید، این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند. از این سه نقطه، کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟

۷۲. نقطهٔ M بر محور $y'y$ قرار دارد و از دو نقطهٔ $A(0, a)$ و $b(b, 0)$ به یک فاصله است. مختصات نقطهٔ M را پیدا کنید.

۷۳. دایره‌ای از سه نقطهٔ $O(0, 0)$ ، $A(0, a)$ و $B(b, 0)$ گذشته است. مختصات مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OAB را پیدا کنید.

۷۴. $A(0, 1)$ و $B(2, 0)$، دو راس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات راس سوم مثلث را پیدا کنید.

۷۵. نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}-2\\-7\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}6\\-3\end{matrix}\right.$ مفروض‌اند. ثابت کنید، می‌توان از این چهار نقطه یک دایره گذراند (یعنی چهار ضلعی $ABCD$، یک چهار ضلعی محاطی است). مختصات مرکز این دایره را پیدا کنید.

۷۶. $A'(1, -1)$، $B'(3, 1)$ و $C'(-1, 2)$، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC، AC و AB از مثلث ABC هستند. مختصات راس‌های

مثلث ABC را پیدا کنید.

۷۷. دربارهٔ مثلث ABC می‌دانیم راس C روی محور $y'y$ و نقطهٔ برخورد میانه‌های آن روی محور $x'x$ است. اگر $A(۲, -۳)$ و $B(-۵, ۱)$ باشد، مختصات راس C و نقطه برخورد میانه‌ها را پیدا کنید.

***۷۸.** اگر $A\left|\begin{matrix}۱\\-۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ مفروض باشند؛ خط راستی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، در چه نقطه‌هایی محورهای مختصات را قطع می‌کند؟

۷۹. اگر $A(۳, ۱)$، $B(۴, ۴)$، $C(۱, ۳)$، ثابت کنید، چهار ضلعی $OABC$ متوازی‌الاضلاع است. اگر در این متوازی‌الاضلاع، ضلع OA را قاعدهٔ آن بگیریم، طول ارتفاع، متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

***۸۰.** $A(۱, ۱)$، $B(۲, -۳)$ و $C(-۱, ۰)$، سه راس یک مثلث‌اند. مختصات نقطهٔ H، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های این مثلث را پیدا کنید.

۸۱. نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

الف) $xy = ۰$؛ ب) $xy > ۰$؛ ج) $x^۲ = y^۲$؛ و) $y > x$؛ ه) $x = ۲$؛ و) $y = -۳$؛ ز) $xy + ۲x - y = ۲$؛ ج) $|x| \le ۲$

۲. مثلثات

§ ۱. واحدهای زاویه و کمانِ دایره

۱. همهٔ ما در روز، حرکت ظاهری خورشید و، شب، حرکت ظاهری ماه وستارگان را دیده‌ایم. می‌گوییم «حرکت ظاهری»، زیرا در واقع چنین حرکتی وجود ندارد. خورشید و ستارگان به دور زمین نمی‌چرخند، بلکه حرکت زمین به دور محور خودش، موجب این اشتباه می‌شود که گمان می‌کنیم، زمین بی حرکت است و همهٔ ستارگان، حرکتی شبانه روزی به دور آن دارند.

بشر در طول هزاران سال، گرفتار این اشتباه بود و تنها در چند سده قبل، دانشمندانی چون کوپرنیک و گالیله و کپلر توانستند قانون‌های حرکت زمین را، به دور محور خود و به دور خورشید کشف کنند و، البته، از آن‌جا که کشف آن‌ها با آموزش‌های کشیشان سازگاری نداشت، گرفتار تعقیب کلیسا شدند و خواندن کتاب‌ها و نوشته‌های آن‌ها، جُرم شناخته شد.

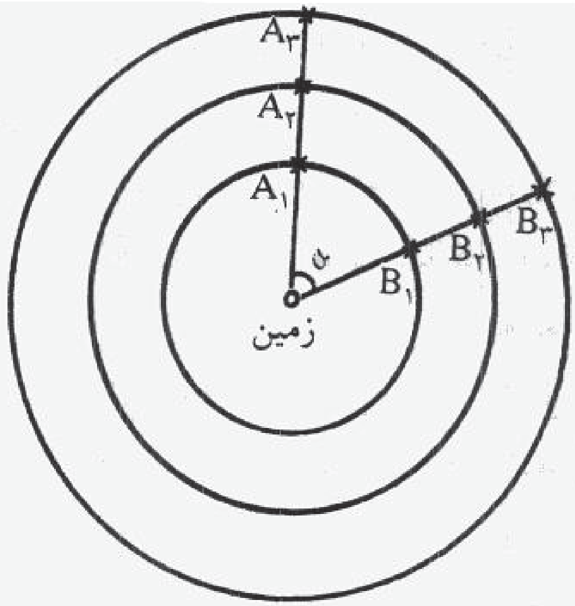
ولی همین حرکت ظاهری ستارگان، چیزهای زیادی به انسان آموخت، چرا که، به یاری همین حرکت‌های ظاهری، می‌توانستند وقت را تشخیص دهند که، چه موقع از روز یا شب است؛ در ضمن، به کمک ستارگان ثابت،

جهت را بشناسند و راه خود را در بیابان و جنگل و دریا گُم نکنند . . . و خیلی چیزهای دیگر.

و برای همهٔ این‌ها، لازم بود «قانون‌های حرکت» ستارگان را بشناسند و دربارهٔ مهم‌ترین ستارگان، بتوانند جای آن‌ها را پیدا کنند و، البته، برای این منظور، به محاسبه و مشاهده نیاز داشتند. در این‌جا، به یکی از این نیازها می‌پردازیم. ستارهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را در نظر بگیرید (شکل ۱۹). این سه ستاره، از زمین در یک راستا دیده می‌شوند. فاصله‌های آن‌ها از زمین، یکی نیست، ولی چون این فاصله‌ها بسیار زیاد است، ما در روی زمین، همهٔ آن‌ها را به تقریب در یک نقطه می‌بینیم. وقتی جای این ستارگان عوض شود و به نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ بروند، کم و بیش، در یک نقطه قرار می‌گیرند. اکنون اگر بخواهیم میزان جابه‌جایی آن‌ها را مشخص کنیم، چگونه عمل کنیم! محاسبهٔ فاصله‌های از $A_۱$ تا $B_۱$ (یا از $A_۲$ تا $B_۲$ یا از $A_۳$ تا $B_۳$)، یعنی محاسبهٔ طول کمان‌های $\overset{\frown}{A_۱B_۱}$، $\overset{\frown}{A_۲B_۲}$ یا $\overset{\frown}{A_۳B_۳}$ کار ساده‌ای نیست و به دانش بالایی نیاز دارد و، این دانش را، اختر شناسان و ریاضی‌دانان باستانی نداشتند. پس چه باید کرد؟

حقیقت این است که طول این کمان‌ها، مثلاً بر حسب کیلومتر (به فرض آن که محاسبه شده باشد)، مشکلی را حل نمی‌کند؛ ما به این طول‌ها نیازی نداریم، ما تنها به میزان چرخش هر ستاره نیازمندیم؛ و هر سه ستاره، به اندازهٔ زاویهٔ α چرخیده‌اند، یکی روی کمان $A_۱B_۱$، دیگری روی کمان $A_۲B_۲$ و سومی روی کمان $A_۳B_۳$. زاویه، میزان چرخش را نشان می‌دهد و ما هم به همین میزان احتیاج داریم. پس اگر زاویهٔ α، برابر ۳۰ درجه باشد، می‌گوییم، هر یک از ستارگان به اندازهٔ ۳۰ درجه جابه‌جا شده‌اند؛ هر کمان دایره را، با همان عددی بیان می‌کنیم که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن، بر حسب درجه، با همان عدد بیان می‌شود.

به این نکته‌ها توجه کنید:



شکل ۱۹

۱) کمان دایره با زاویه فرق دارد: کمان یک خط منحنی است، در حالی که زاویه، به بخشی از صفحه گفته می‌شود که بین دو نیم‌خط راست (با مبداء مشترک) قرار دارد؛ **کمان یک عنصر خطی است و زاویه یک عنصر سطحی** و، بنابراین از دو کیفیت مختلف‌اند. نمی‌توانیم بگوییم «زاویه مرکزی، در دایره، با کمان روبه‌روی آن برابر است»، بلکه باید بگوییم «اندازهٔ زاویهٔ مرکزی در دایره، بر حسب درجه، با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن بر حسب درجه، یکی است. در زاویه، با **درجهٔ زاویه‌ای** سرو کار داریم و در دومی با **درجهٔ کمانی**؛ و این دو، با هم یکی نیستند، یعنی نمی‌توان یکی را بر دیگری منطبق کرد.

برای نشان دادن زاویه، چون نمی‌توانیم سطح بین دو نیم‌خط را مشخص کنیم، معمول شده است با کمانی در نزدیکی راس زاویه، دو ضلع آن را به هم وصل کنیم، یعنی اندازهٔ زاویه را، به یاری کمانی از یک دایره نشان دهیم.

۲) اندازهٔ کمان بر حسب درجه، به هیچ وجه، طول کمان را معین نمی‌کند، بلکه تنها میزان چرخش یک نقطه را روی محیط دایره مشخص

می‌کند.

۳) به این ترتیب، محیط دایره (هر دایره‌ای) برابر ۳۶۰ درجه می‌شود، کمان نیم دایره ۱۸۰ درجه و کمان رُبع دایره ۹۰ درجه.

وقتی از کمان ۳۰ درجه صحبت می‌کنیم، نمی‌توانیم طول آن را حدس بزنیم، بلکه تنها می‌فهمیم که، این کمان، برابر $\frac{۳۰}{۳۶۰}$ یا $\frac{۱}{۱۲}$ محیط دایره است و، طول آن بستگی به اندازهٔ شعاع دایره دارد که ما، برای بیان اندازهٔ چرخش یک نقطه، نیازی به آن نداریم.

یادداشت تاریخی. چرا ۳۶۰ درجه؟ چرا محیط دایره را به ۳۶۰ بخش برابر تقسیم کرده‌اند و نام هر بخش را یک درجه گذاشته‌اند؟

در واقع، این تقسیم‌بندی را، از هزاران سال پیش از آغاز سال‌های میلادی و از اخترشناسانی که در سرزمین بابِل زندگی می‌کردند، به یادگار داریم.

بابِل باستانی به سرزمینی گفته می‌شد که در عراق کنونی و، به ویژه در بخش بین دو رود دجله و فرات («بین‌النهرین» یا «میان دو رود») واقع بود و با سرزمین «عیلام» (امپراتوری بزرگ ایرانی پیش از ورود آریائی‌ها، در جنوب و جنوب غربی ایران کنونی) همسایگی داشت.

اخترشناسان و ریاضی‌دانان هوشمند بابِلی و عیلامی، چه در ریاضیات و چه در اخترشناسی، به پیشرفت‌های بزرگ و شگفت‌انگیزی رسیده بودند و، در برخی زمینه‌ها، از همکاران یونانی خود (که بیش از هزار سال بعد از آنها می‌زیستند)، بسیار جلوتر بودند.

اخترشناسان بابِلی، گمان می‌کردند که خورشید، در حرکت ظاهری خود به دور زمین، در هر روز (در زمانی که طول روز با طول شب برابر است؛ مثل اول بهار)، به اندازهٔ ۱۸۰ برابر قطر خود حرکت می‌کند، یعنی اندازهٔ محیط نیم‌دایرهٔ فوقانی را (که خورشید، روی آن حرکت می‌کند) درست ۱۸۰ برابر قطر خورشید می‌دانستند. به همین جهت، نیم‌دایره را به ۱۸۰ بخش تقسیم کردند و هر بخش را یک درجه نامیدند و، بنابراین، تمامی دایره برابر ۳۶۰

درجه می‌شود. همین تقسیم‌بندی بابِلی‌ها، با آن که، تقسیم‌بندی‌های دیگری در جاهای دیگر و زمان‌های دیگر به وجود آمد، تا امروز باقی مانده است.

هندی‌ها (به پیروی از ارشمیدس)، محیط دایره را به ۹۶ بخش تقسیم می‌کردند و، بعد از پیروزی انقلاب بزرگ فرانسه در سال ۱۷۸۹ میلادی، ضمن تنظیم دستگاه مقیاس‌های متری (که امروز کم و بیش در همهٔ جهان معمول است)، محیط دایره را به ۴۰۰ بخش تقسیم کردند و، هر بخش را، یک **گراد** نامیدند. ولی تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه، همچنان با نیرومندی به حکومت خود ادامه می‌دهد و جانشینی را نپذیرفته است.

بابِلی‌ها، در محاسبه‌های علمی و به‌ویژه در محاسبه‌های اخترشناسی خود، از عدد نویسی در مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند (و در محاسبه‌های عادی، مثل عدد نویسی امروزی ما، از مبنای ۱۰). به همین جهت، بخش‌های کوچکتر محیط دایره را، دقیقه ($\frac{۱}{۶۰}$ درجه)، ثانیه ($\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه) و غیره نامیدند. امروز معمول است که کسر ثانیه را با عدد دهدهی نشان می‌دهند و مثلاً می‌گویند: ۱۵ درجه و ۲۵ دقیقه و ۴۰/۷۵ ثانیه.

گراد، در بخش‌های کوچکتر خود، با «دسی» و «سانتی» و «میلی» بیان می‌شود: دسی‌گراد برابر $\frac{۱}{۱۰}$ گراد، سانتی‌گراد برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد و میلی‌گراد برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد. ۳۵/۱۲۵ گراد، یعنی ۳۵ گراد، ۱ دسی‌گراد، ۲ سانتی‌گراد و ۵ میلی‌گراد.

بستگی بین درجه و گراد روشن است: هر ۳۶۰ درجه برابر است با ۴۰۰ گراد. کمان ۹۰ درجه، کمان ۱۰۰ گراد است و زاویهٔ ۳۶ درجه همان زاویهٔ ۴۰ گراد.

همین قدر یادآوری می‌کنیم که، واحدهای امروزی زمان، یعنی «ساعت» و «دقیقه» و «ثانیه» هم متعلق به بابِلی‌های باستان است. آن‌ها بودند که شبانه روز را به ۲۴ ساعت، هر ساعت را به ۶۰ دقیقه و غیره تقسیم کردند که ما،

تا امروز، از آن پیروی می‌کنیم.

نیازی به گفتن ندارد که مثلاً «دقیقهٔ زمانی» با «دقیقهٔ کمانی» هیچ شباهتی ندارد، همان طور، این دو با «دقیقه زاویه‌ای» یکی نیستند.

۲. یک واحد دیگر برای کمانِ دایره یا زاویه. دایره‌ای به شعاع ۳ در نظر بگیرید؛ محیط این دایره برابر ۶π می‌شود (محیط دایره، از ضرب طول قطر در عدد π، که به تقریب برابر ۳/۱۴ است، به دست می‌آید). در این صورت، کمانی از این دایره که برابر ۳۰ درجه است، طولی برابر $\frac{۶\pi}{۱۲}$ یا $\frac{\pi}{۲}$ خواهد داشت (کمان ۳۰ درجه، $\frac{۱}{۱۲}$ تمامی محیط دایره است). ولی این $\frac{\pi}{۲}$ را می‌توان به صورت

$$\frac{\pi}{۶} \times ۳$$

نوشت و گفت: *کمان ۳۰ درجه، $\frac{\pi}{۶}$ برابر شعاع آن است* ($\frac{\pi}{۶}$ *برابر*، یعنی به تقریب ۰/۵۲ *برابر*).

اگر شعاع دایره را، مثلاً برابر ۱۰ می‌گرفتیم، باز هم به همین نتیجه می‌رسیدیم، زیرا محیط دایره برابر ۲۰π و کمان ۳۰ درجه برابر $\frac{۲۰\pi}{۱۲}$ یا $\frac{۵\pi}{۳}$ می‌شد و روشن است که

$$\frac{۵\pi}{۳} = \frac{\pi}{۶} \times ۱۰$$

یعنی، کمان ۳۰ درجه، $\frac{\pi}{۶}$ برابر شعاع آن است.

اگر، در حالت کلی، شعاع دایره را برابر R بگیریم، محیط آن برابر $۲\pi R$ و کمان ۳۰ درجه برابر $\frac{۲\pi R}{۱۲}$ یا $\frac{\pi R}{۶}$ می‌شود و

$$\frac{\pi R}{۶} = \frac{\pi}{۶} \times R$$

به این ترتیب، می‌توان کمان دایره را، با یک نسبت در نظر گرفت: نسبت *طول کمان به طول شعاع دایره.* به زبان دیگر، *کمانی از دایره را، که طولی برابر طول شعاع دارد، به عنوان واحد اندازه‌گیری کمان در نظر می‌گیریم.* در چنین حالتی، واحد اندازه‌گیری کمان (یا زاویهٔ مرکزی رو به روی آن) را، **رادیان** نام نهاده‌اند.

ببینیم، محیط دایره چند رادیان می‌شود! اگر شعاع دایره، برابر R باشد، محیطی برابر $۲\pi R$ پیدا می‌کند. محیط دایره، یعنی $۲\pi R$ چند برابر R (شعاع) است؟

$$۲\pi R : R = ۲\pi$$

محیط دایره ۲π برابر شعاع آن است (اندکی بیش از ۶ برابر)، یعنی *محیط دایره، برابر ۲π رادیان است.*

اگر π را، به تقریب برابر ۳ بگیریم، محیط دایره برابر ۶ رادیان می‌شود، ولی در این صورت، مثل این است که محیط شش ضلعی منتظم محاط در دایره را، به جای محیط دایره گرفته باشیم که، البته، اشتباه حاصل، قابل گذشت نیست. اگر π را به تقریب برابر ۳/۱۴ بگیریم، محیط دایره برابر ۶/۲۸ رادیان می‌شود (که البته، هنوز از مقدار واقعی، اندکی کمتر است). بنابراین، بهتر است، همیشه بگوییم: محیط دایره برابر ۲π رادیان است و، در عمل، بسته به دقتی که برای محاسبه‌های خود لازم داریم، مقدار تقریبی عدد π را قرار دهیم. برای محاسبه‌های عادی، ۳/۱۴ برای π، عدد خوبی است، با وجود این، اطلاع از چند رقم بعدی این عدد، گاهی سودمند می‌افتد:

$$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵$$

در عمل، بسیار کم پیش می‌آید که به همهٔ این رقم‌ها، یا بیشتر از آن نیاز داشته باشیم. دایرهٔ بسیار بزرگی را در نظر بگیرید که قطری برابر ۲۰۰۰ کیلومتر

داشته باشد. اگر برای محاسبهٔ محیط آن از عدد π، با همین ۸ رقم دهدهی استفاده کنیم، به عدد

۶۲۸۳۱۸۵۳۰ متر

می‌رسیم؛ ولی اگر عدد π را تا ۱۰ رقم دهدهی در نظر بگیریم:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$$

برای محیط دایره، به عدد

۶۲۸۳۱۸۵۳۰ متر و ۷۰ سانتی‌متر

می‌رسیم. آیا فکر می‌کنید، برای فاصله‌ای بیش از ۶۲۸ هزار کیلومتر، تفاوتی به اندازهٔ ۷۰ سانتی‌متر می‌تواند اثری داشته باشد؟ حتا اگر π را برابر ۳/۱۴ بگیریم، در محاسبهٔ محیط آن، نزدیک ۰/۰۶ درصد اشتباه پیش می‌آید، یعنی در هر ۱۰۰۰ متر (یک کیلومتر) ۶۰ سانتی‌متر با واقعیت اختلاف پیدا می‌کند که در محاسبه‌های عملی، مُشکلی به وجود نمی‌آورد.

۳. **تبدیل یک واحد به واحد دیگر.** با توجه به آن چه دیدیم،

$$۲\pi \text{ رادیان} = ۴۰۰ \text{ گراد} = ۳۶۰ \text{ درجه} = \text{محیط دایره}$$

با در نظر گرفتن همین برابری‌ها، می‌توان درجه را به رادیان یا برعکس تبدیل کرد (از آن‌جا که «گراد» کمتر کاربرد دارد، بیشتر از «درجه» و «رادیان» صحبت می‌کنیم، اگر چه تبدیل گراد به درجه یا رادیان و برعکس هم، به سادگی انجام می‌شود).

به طور کلی، اگر زاویه یا کمانی برابر a درجه باشد، چون هر ۱۸۰ درجه برابر π رادیان است، هر درجه برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان و a درجه برابر $\frac{\pi a}{۱۸۰}$ رادیان می‌شود:

$$a \text{ درجه} = \frac{\pi a}{۱۸۰} \text{ رادیان}$$

و برعکس، هر a رادیان برابر است با $\frac{۱۸۰a}{\pi}$ درجه. مثلاً، زاویهٔ ۴۵ درجه برابر $\frac{\pi}{۴}$ رادیان و کمان $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان برابر ۷۵ درجه است.

اگر محیط دایره را به تقریب برابر ۶ رادیان بگیریم، آن وقت، هر رادیان برابر ۶۰ درجه می‌شود؛ ولی محیط دایره از ۶ رادیان بیشتر است، بنابراین هر رادیان کمتر از ۶۰ درجه است در واقع

$$۱ \text{ رادیان} \approx ۵۷^\circ \quad ۱۷' \quad ۴۴/۸''$$

و برعکس

$$۱ \text{ درجه} \approx ۰/۰۱۷۴۵۳ \text{ رادیان}$$

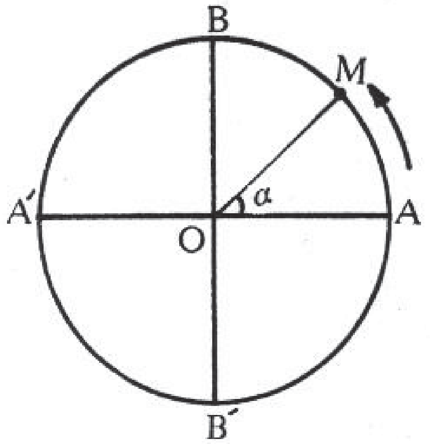
۴. دو یادآوری مهم. ۱) در ریاضیات معمول شده است، وقتی زاویه یا کمانی با درجه یا گراد بیان شده باشد، نام واحد، یعنی واژهٔ درجه یا واژهٔ گراد؛ یا علامت درجه (°) یا علامت گراد (g) را ذکر می‌کنند: زاویهٔ ۶۵ درجه، کمانی برابر ۲۰ گراد و غیره. ولی اگر واحد زاویه یا کمان، رادیان باشد، اغلب نام واحد را نمی‌برند. اگر بگوییم زاویه‌ای برابر ۵ است، یعنی زاویهٔ ۵ رادیان و اگر بگوییم کمان $\frac{\pi}{۳}$، یعنی کمانی برابر $\frac{\pi}{۳}$ رادیان (که همان کمان ۶۰ درجه است).

۲) مراقب نماد π باشید. π یعنی به تقریب ۳/۱۴؛ ولی π رادیان (یعنی ۳/۱۴ رادیان) برابر است با ۱۸۰ درجه.

اگر از ما بپرسند، π چقدر است، پاسخ می‌دهیم به تقریب ۳/۱۴، ولی اگر بپرسند، کمان π رادیان چند درجه است، پاسخ می‌دهیم: ۱۸۰ درجه.

§ ۲. نسبت‌های مثلثاتی

۱. دایرهٔ مثلثاتی. شبیه محور عددی، برای این که بتوانیم کمان مشخصی را روی محیط یک دایره نشان دهیم، باید مبداء، جهت حرکت و واحد را



شکل ۲۰

روی محیط دایره، تعیین کنیم. معمول شده است که، انتهای راست قطر افقی دایره، یعنی نقطهٔ A را، مبداء کمان‌ها و جهت مثبت را، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیرند (شکل ۲۰). واحد را می‌توان درجه یا رادیان گرفت، ولی بهتر است واحد را «شعاع دایره»، یعنی رادیان بگیریم. خواهید دید، انتخاب واحد رادیان، چقدر کار تعریف‌ها و محاسبه‌ها را ساده می‌کند.

به این ترتیب، روی شکل ۲۰، نقطهٔ M، نمایندهٔ کمان مثبت $\widehat{AM}$ (و همچنین، کمان منفی $\widehat{AA'M}$) است.

کمان AM، تنها نمایندهٔ کمانی کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ (یعنی ۹۰ درجه) نیست [کمان $\frac{\pi}{2}$، یعنی کمان $\frac{\pi}{2}$ رادیان]، بلکه نمایندهٔ کمانی است که مبداء آن A و انتهای آن M باشد. بنابراین، با بیان «کمان AM»، روشن نیست، منظور کمان مثبت AM است یا کمان منفی $\widehat{AA'M}$. مطلب، از این هم کلی‌تر است: وقتی کمان AM را به معنای کمانی می‌گیریم که آغاز آن A و انتهای آن M باشد، می‌توان این طور تصور کرد که، با آغاز حرکت از A، نخستین باری که به M، در جهت مثبت رسیدیم، متوقف شویم و کمان کمتر از ۹۰

درجه‌ای را به دست آوریم. این را **مقدار اصلی** کمان AM گویند. ولی اگر، با آغاز حرکت از A، وقتی به M رسیدیم، حرکت را ادامه دهیم، یک دور کامل دیگر پیش برویم و، در بار دوم، وقتی به M رسیدیم، متوقف شویم. باز هم، نام کمان ما AM است، ولی مقدار آن، به اندازهٔ یک دور دایره، با کمان قبلی، فرق دارد. فرض کنید، مقدار اصلی کمان AM، برابر ۶۰ درجه (یا $\frac{\pi}{۳}$ رادیان) باشد، در این صورت، کمان اخیر، که همان AM نامیده می‌شود، برابر $۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۴۲۰^\circ$ یا $۲\pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۷\pi}{۳}$ (رادیان) خواهد بود. می‌توان، ضمن حرکت از A، وقتی برای بار سوم، چهارم، ...، به M رسیدیم، متوقف شویم، در این صورت، کمان AM برابر

$$۲ \times ۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ, ۳ \times ۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ, \ldots$$

یا بر حسب رادیان، برابر

$$۴\pi + \frac{\pi}{۳}, ۶\pi + \frac{\pi}{۳}, \ldots$$

می‌شود. پس می‌توان، کمان AM را به معنای

$$\widehat{AM} = ۳۶۰n^\circ + ۶۰^\circ \text{ یا } ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \qquad (۱)$$

گرفت، به شرطی که n و k را، عددهایی درست در نظر بگیریم. کمان AM، نمایندهٔ بی‌نهایت کمان است که ۶۰ درجه (یا $\frac{\pi}{۳}$ رادیان)، یکی از آن‌ها، یعنی مقدار اصلی کمان AM است.

در برابری‌های (۱)، اگر n یا k را برابر صفر بگیریم، مقدار اصلی کمان AM، اگر $n > ۰$ یا $k > ۰$، آن وقت کمان‌های مثبت AM و اگر $n < ۰$ یا $k < ۰$، آن وقت کمان‌های منفی AM به دست می‌آید (ولی در هر حال n و k، عددهای درستی هستند، $n \in \mathbf{Z}$ و $k \in \mathbf{Z}$).

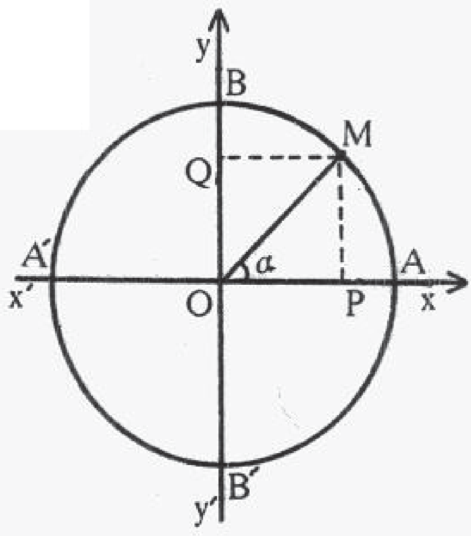
دایره‌ای با این ویژگی‌ها، یعنی دایره‌ای را که برای نقطه‌های واقع بر محیط آن، مبداء، جهت و واحد انتخاب شده باشد، **دایرهٔ مثلثاتی** گویند.

دایرهٔ مثلثاتی ویژگی دیگری هم دارد: *شعاع دایره مثلثاتی را واحد می‌گیرند*، یعنی هر پاره‌خط راستی، در بستگی با دایره مثلثاتی، با شعاع این دایره سنجیده می‌شود؛ اگر بگوییم، طول پاره‌خط راستی در دایرهٔ مثلثاتی برابر است با $\frac{۲}{۳}$، یعنی این پاره‌خط راست، طولی برابر $\frac{۲}{۳}$ طول شعاع دایره دارد. به همین مناسبت (یعنی انتخاب شعاع دایره، به عنوان واحد اندازه‌گیری طول)، بهتر است واحد کمان‌ها را هم رادیان بگیریم، زیرا کمان یک رادیان، یعنی کمانی که طولی برابر طول شعاع دایره دارد و، در نتیجه، واحد کمان‌ها، همان «شعاع» دایره می‌شود.

انتخاب رادیان، برای واحد کمان‌ها، اجازه می‌دهد بتوانیم، نسبت طول‌های یک کمان به یک وتر را بنویسیم، زیرا هر دو با واحد «شعاع» در نظر گرفته شده‌اند و، برای نسبت دو مقدار هم، باید دو جملهٔ نسبت، با یک واحد بیان شده باشند.

همهٔ آن چه را که در بارهٔ کمان‌های AM گفتیم، می‌توان برای زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به آن‌ها هم تکرار کرد. اگر مقدار اصلی کمان‌های AM برابر α باشد، مقدار اصلی زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به این کمان‌ها هم، برابر α است و غیره.

۲. دایرهٔ مثلثاتی و محورهای مختصات. انتخاب مبداء، جهت و واحد، روی محیط دایره، تکلیف ما را در بارهٔ کمان‌ها روشن می‌کند. ولی در دایره، ممکن است پاره‌خط‌های راستی وجود داشته باشد، که تکلیف آن‌ها را با این انتخاب نمی‌توان روشن کرد. برای برطرف کردن این دشواری، دستگاه محورهای مختصات را، وارد در دایرهٔ مثلثاتی می‌کنیم. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که مبداء آن بر مرکز دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثبت محور طول بر جهت از O به A باشد؛ O را مرکز دایره و A را مبداء



شکل ۲۱

کمان‌ها در روی دایره گرفته‌ایم (شکل ۲۱).

در این صورت، اگر مثلاً نقطهٔ M را در وسط کمان $\widehat{AB}$ (شکل ۲۱) بگیریم، $\overline{OP}$ طول و $\overline{OQ}$ عرض آن می‌شود و، برای مختصات نقطهٔ M، به دست می‌آید: $M(۱, ۱)$ (چرا؟ این عددها را از کجا آوردیم؟).

۳. نسبت‌های مثلثاتی. دایرهٔ مثلثاتی را، با همهٔ ویژگی‌های آن (مبداء، جهت، واحد و شعاع برابر واحد)، همراه با دستگاه محورهای مختصاتِ وابسته به آن، در نظر می‌گیریم و این تعریف‌ها را می‌پذیریم (شکل ۲۱):

۱) طول نقطهٔ M (انتهای کمان AM)، یعنی $\overline{OP}$ را کسینوس کمان AM یا کسینوس زاویهٔ α (زاویهٔ مرکزی رو به رو به کمان AM) گوییم و به این صورت می‌نویسیم:

$$\cos \widehat{AM} = \overline{OP} \quad \text{یا} \quad \cos\alpha = \overline{OP}$$

۲) عرض نقطهٔ M، یعنی $\overline{OQ}$، سینوس کمان AM یا سینوس زاویهٔ α نام دارد و این طور نوشته می‌شود:

$$\sin \widehat{AM} = \overline{OQ} \quad \text{یا} \quad \sin\alpha = \overline{OQ}$$

از همین تعریف ساده، برای کسینوس و سینوس یک کمان، این نتیجه‌ها به دست می‌آید:

نتیجهٔ ۱. چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر واحد است، بنابراین کسینوس یا سینوس یک کمان، عددی است که از ۱ بزرگتر و از ۱− کوچکتر نیست:

$$-۱ \leq \cos\alpha \leq ۱, -۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$$

و یا به صورتی ساده‌تر:

$$|\cos\alpha| \leq ۱, |\sin\alpha| \leq ۱$$

(توجه کنید، وقتی مثلاً می‌نویسیم $\cos\alpha$، منظور کسینوس α رادیان است؛ اگر α بر حسب درجه یا گراد باشد، باید علامت درجه یا گراد را روی α قرار دهیم).

نتیجه ۲. اگر مقدار اصلی کمان یا زاویه را α درجه بگیریم، روشن است که: اگر $۹۰^\circ > \alpha^\circ > ۰^\circ$، آن وقت

$$۰ < \cos\alpha^\circ < ۱, ۰ < \sin\alpha^\circ < ۱$$

اگر $۱۸۰^\circ > \alpha^\circ > ۹۰^\circ$، آن وقت

$$-۱ < \cos\alpha^\circ < ۰, ۰ < \sin\alpha^\circ < ۱$$

اگر $۲۷۰^\circ > \alpha^\circ > ۱۸۰^\circ$، آن وقت

$$-۱ < \cos\alpha^\circ < ۰, -۱ < \sin\alpha^\circ < ۰$$

اگر $۳۶۰^\circ > \alpha^\circ > ۲۷۰^\circ$، آن وقت

$$۰ < \cos\alpha^\circ < ۱, -۱ < \sin\alpha^\circ < ۰$$

به زبان دیگر: وقتی انتهای کمان AM در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، کسینوس و سینوس آن مثبت است؛ اگر انتهای کمان AM در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد، کسینوس آن منفی و سینوس آن مثبت است، اگر انتهای کمان AM در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، کسینوس و سینوس آن منفی است و، سرانجام، اگر انتهای کمان AM در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، کسینوس آن مثبت و سینوس آن منفی است.

نتیجه ۳. این مقدارها، از روی دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۲۱) به سادگی به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \cos ۰^\circ = ۱ \\ \sin ۰^\circ = ۰ \end{cases}, \begin{cases} \cos ۹۰^\circ = ۰ \\ \sin ۹۰^\circ = ۱ \end{cases}, \begin{cases} \cos ۱۸۰^\circ = -۱ \\ \sin ۱۸۰^\circ = ۰ \end{cases},$$

$$\begin{cases} \cos ۲۷۰^\circ = ۰ \\ \sin ۲۷۰^\circ = -۱ \end{cases}$$

و روشن است، به هر کدام از این زاویه‌ها (یا کمان‌ها) می‌توان هر مضربی از ۳۶۰ درجه (یعنی هر چند دورِ دایره) اضافه کرد، بدون این که مقدار کسینوس یا سینوس آن‌ها تغییر کند. به زبان دیگر، *هر مضربی از ۳۶۰ درجه را به زاویه یا کمان اضافه، یا از آن کم کنیم، مقدار کبسینوس یا سینوس آن تغییر نمی‌کند.* مثلاً

$$\sin ۳۶۰^\circ = \sin ۰^\circ = ۰; \cos ۹۰۰^\circ = \cos ۱۸۰^\circ = -۱;$$

$$\sin(-۱۱۷۰^\circ) = \sin(۲۷۰^\circ - ۴ \times ۳۶۰^\circ) = \sin ۲۷۰^\circ = -۱$$

نتیجه ۴. اگر کمان یا زاویهٔ بین ۰ درجه و ۱۸۰ درجه را در نظر بگیریم، هر چه زاویه بزرگتر باشد، کسینوس آن کوچکتر است،

برای $۰ \leq \alpha, \beta \leq ۱۸۰^\circ$، اگر $\alpha < \beta$، آن وقت $\cos\alpha > \cos\beta$؛ اگر $\alpha > \beta$، آن وقت $\cos\alpha < \cos\beta$. می‌گویند: *کسینوس در فاصلهٔ صفر تا ۱۸۰ درجه نزولی است.*

برعکس، وقتی از زاویهٔ ۱۸۰ درجه تا زاویهٔ ۳۶۰ درجه حرکت کنیم، کسینوس زاویه، از ۱− تا ۱+ بزرگ می‌شود، یعنی برای

$$۱۸۰^\circ \leq \alpha, \beta \leq ۳۶۰^\circ$$

اگر $\beta > \alpha$، آن وقت $\cos\alpha < \cos\beta$؛ اگر $\beta < \alpha$، آن وقت $\cos\beta > \cos\alpha$. گویند: *کسینوس در ربع‌های سوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی صعودی است.*

خودتان سعی کنید، وضع سینوس را، وقتی زاویه یا کمان، از ۰ تا ۳۶۰ درجه تغییر می‌کند، مشخص کنید، یعنی روشن کنید، مقدار سینوس، در چه ربع‌هایی از دایرهٔ مثلثاتی صعودی و در چه ربع‌هایی از آن نزولی است! توجه کنید، صعودی بودن و نزولی بودن، مفهومی است که در ریاضیات، تعریفی دقیق دارد که آن را، در دورهٔ این کتاب‌ها (جلد سوم) خواهید دید؛ اکنون به همان درک شهودی خود اکتفا کنید؛ درک شهودی شما کمتر اشتباه می‌کند.

نتیجهٔ ۵. دوباره به شکل ۲۱ برمی‌گردیم. در آن‌جا

$$\overline{OP} = \cos\alpha, \overline{OQ} = \sin\alpha, |OM| = ۱$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPM داریم:

$$|OP|^۲ + |PM|^۲ = |OM|^۲$$

ولی دو پاره‌خط راست PM و OQ، به ترتیب طول‌هایی برابر سینوس و کسینوس α دارند، پس

$$(\cos\alpha)^۲ + (\sin\alpha)^۲ = ۱$$

که بهتر است، آن را این طور بنویسیم:

$$\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha = ۱ \qquad (۱)$$

این، نخستین و به احتمالی مهم‌ترین دستور بین کسینوس و سینوس یک زاویه است. معنای این دستور این است که، با در دست داشتن مقدار یکی از دو نسبت مثلثاتی زاویه ($\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$) می‌توان دیگری را به دست آورد.

مثال. انتهای کمانی در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است و سینوسی برابر $\frac{۳}{۵}$ دارد. کسینوس این کمان چقدر است؟

انتهای کمان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است، پس کسینوس آن منفی و سینوس آن مثبت است. مقدار اصلی کمان را α می‌نامیم. داریم:

$$\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

(جذر $\frac{۱۶}{۲۵}$، هم $+\frac{۴}{۵}$ است و هم $-\frac{۴}{۵}$. ولی انتهای کمان در ربع دوم و کسینوس آن منفی است. بنابراین تنها $-\frac{۴}{۵}$ را پذیرفتیم).

یادداشت ۱. ریاضی‌دانان ایرانی ـ که پایه‌گذاران اصلی دانش مثلثات هستند ـ اغلب، شعاع دایره را واحد نمی‌گرفتند و، با فرض $\overline{OP}=x$ و $\overline{OQ}=y$ (شکل ۲۱)، کسینوس و سینوس α را به صورت

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},\sin\alpha=\frac{y}{R}\qquad(\mathrm{I})$$

(R، شعاع دایره است) و یا به صورت:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}},\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\qquad(\mathrm{II})$$

تعریف می‌کردند. البته، این تعریف، خللی در دستورهای مثلثاتی و کاربرد

آن‌ها، پدید نمی‌آورد. مثلاً

$$\cos^۲ \alpha + \sin^۲ \alpha = \left(\frac{x}{R}\right)^۲ + \left(\frac{y}{R}\right)^۲ = \frac{x^۲ + y^۲}{R^۲} = ۱$$

و یا

$$\cos^۲ \alpha + \sin^۲ \alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\right)^۲ + \left(\frac{y}{\sqrt{x^۲ + g^۲}}\right)^۲ =$$

$$= \frac{x^۲ + y}{x^۲ + y^۲} = ۱$$

که همان دستور (۱) است. ولی به تدریج متوجه شدند که با واحد گرفتن شعاع دایره، کار ساده‌تر می‌شود و لزومی ندارد، مقدار R را به دنبال خود بکشانیم. اگر چه بعضی از نویسندگان، هنوز از این تعریف (که مربوط به تاریخ است) استفاده می‌کنند. حتا ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی (که کم و بیش هم زمان بودند و نزدیک به هزار سال پیش می‌زیستند؛ اولی از جنوب خراسان ـ تربت جام ـ و دیگری از شمال خراسان بزرگ ـ ماوراءالنهر ـ و در واقع، اساسی ترین دستورهای مثلثاتی را پیدا کردند) در جاهایی، و البته به ندرت، یادآوری می‌کنند که، با فرض $R = ۱$، دستورها ساده تر می‌شوند.

یادداشت ۲. ریاضی‌دانان ایرانی، برای سینوس، از واژهٔ «جِیب» (واژه‌ای عربی به معنای «گریبان») و برای کسینوس، از واژهٔ «جیب تمام» استفاده می‌کردند، وقتی نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی، و به ویژه خوارزمی، به زبان لاتینی و زبان‌های اروپایی ترجمه شد، معنای واژهٔ «جیب» (گریبان) را در زبان خود به جای آن گذاشتند: سینوس، در زبان فرانسوی، همان معنای جیب را در زبان عربی دارد. (نخستین ترجمه از نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی، که

در آن، صحبت از نسبت‌های مثلثاتی شده است، ترجمه‌ای بود که در سدهٔ دوازدهم میلادی به وسیلهٔ «گرادوس، کره مونه سیس» ایتالیایی، از عربی به لاتینی انجام گرفت و، در آن، واژهٔ سینوس را به کار برد).

اما دربارهٔ ریشهٔ واژهٔ «جیب»، دو دیدگاه وجود دارد:

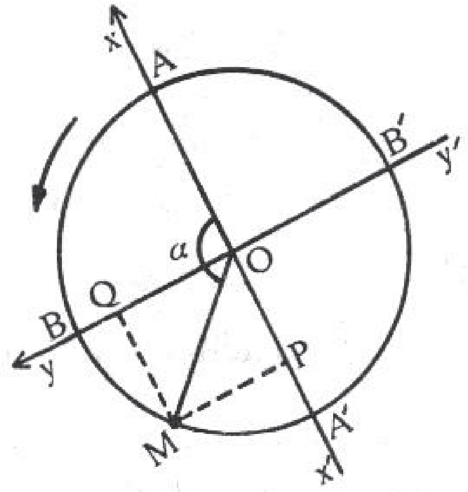
«جیا» در زبان سانسکریت (هند) به معنای وتر و گاهی «نیم وتر» است. نخستین کتابی که به وسیلهٔ فزاری، یک ریاضی‌دان ایرانی، به دستور منصور خلیفه عباسی به زبان عربی ترجمه شد، کتابی از نوشته‌های دانشمندان هندی دربارهٔ اختر شناسی بود. مترجم، برای حرمت گذاشتن به نویسندگان کتاب، «جیا» را تغییر نمی‌دهد و تنها، برای این که در عربی بی‌معنا نباشد، آن را به صورت «جیب» در می‌آورد.

دیدگاه دوم، که منطقی تر به نظر می‌آید، این است که، در ترجمه، از واژهٔ فارسی «جیپ» [بر وزن سیب] استفاده شده که به معنی «تکه چوب عمودی» یا «دیرک» است. نسخه نویسان بعدی که فارسی را فراموش کرده بودند و معنای «جیپ» را نمی‌دانستند، آن را «جِیب» خواندند که در عربی معنایی داشته باشد.

یادداشت ۳. ما، آن طور که معمول است، مبداء کمان‌ها را، روی دایرهٔ مثلثاتی، انتهای راست قطر افقی گرفتیم؛ در ضمن دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب کردیم که، از O به A، در جهت مثبت محور $x'x$ باشد. ولی گاهی، ضرورت پیدا می‌کند، مبداء کمان‌ها در نقطهٔ دیگری انتخاب شود. شکل ۲۲، همه چیز را روشن می‌کند. در آنجا، کمان AM را می‌بینید که، انتهای آن، در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است و برای آن داریم:

$$\cos \widehat{AM} = \overline{OP} < 0, \sin \widehat{AM} = \overline{OQ} > 0$$

یادداشت ۴. از این به بعد، در دایرهٔ مثلثاتی، محورهای $x'x$ و $y'y$ را، که در راستای دو خط راست $A'A$ (قطر افقی) و $B'B$ قرار دارند



شکل ۲۲

و، همچنین، نشانه‌های پیکان را که معرف جهت این محورهاست، مشخص نمی‌کنیم تا از پیچیده‌تر شدن احتمالی شکل‌ها جلوگیری کنیم؛ ولی همیشه باید این محورها را در ذهن خود مجسم داشته باشیم.

یادداشت ۵. با توجه به تعریفی که برای سینوس یک کمان داریم، می‌توانیم بگوییم: *سینوس هر کمانی از دایره، از لحاظ قدر مطلق، برابر است با نصف طول وتر دو برابر این کمان.*

این تعریف، به ویژه در حالت‌هایی که، بنا به ضرورت، ناچار می‌شویم مبداء کمان‌ها را در جاهای مختلفی انتخاب کنیم، مفید است. برای تعیین علامت مقدار سینوس، باید از اندازهٔ تقریبی کمان اطلاع داشته باشیم.

۴. دو نسبت مثلثاتی دیگر. نسبت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ را تانژانت زاویهٔ α و نسبت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ را کتانژانت زاویهٔ α نامیده‌اند. تانژانت را با نماد tan یا tg و کتانژانت را با نماد cotg یا cot نشان می‌دهند:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (۲)$$

از دستورهای (۲)، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\text{tg}\alpha \cdot \cot\alpha = ۱ \qquad (۳)$$

دستورهای (۱) و (۲) و (۳)، دستورهای اصلی در مثلثات مقدماتی‌اند و پایهٔ بحث‌های بعدی را تشکیل می‌دهند.

یادداشت. ریاضی‌دانان ایرانی، تانژانت را «ظِل» (واژه‌ای عربی، به معنی «سایه») و کتانژانت را «ظل تمام» می‌نامیدند. واژهٔ «تانژانت» هم، در زبان فرانسوی به معنای «سایه» است.

از تعریف تانژانت و کتانژانت، این نتیجه‌ها به دست می‌آید:

نتیجه ۱. تانژانت برای زاویه‌های ۹۰ درجه و ۲۷۰ درجه معنا ندارد، زیرا $\cos ۹۰^\circ = \cos ۲۷۰^\circ = ۰$ و در نسبت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد (تقسیم بر صفر، بی معنی است).

همچنین کتانژانت برای زاویه‌های صفر درجه و ۱۸۰ درجه بی معنی است، زیرا $\sin ۰^\circ = \sin ۱۸۰^\circ = ۰$ و، در این صورت، نسبت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$، معنای خود را از دست می‌دهد.

نتیجه ۲. اگر سینوس و کسینوس یک کمان یا یک زاویه، هم علامت باشند، آن وقت تانژانت و کتانژانت آن‌ها مثبت است؛ همچنین تانژانت و کتانژانت وقتی منفی هستند که سینوس و کسینوس متناظر آن‌ها، علامت‌های متفاوتی داشته باشند. به این ترتیب:

اگر انتهای یک کمان در ربع اول یا ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، تانژانت و کتانژانت آن کمان مثبت و اگر انتهای کمان در ربع دوم یا ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، تانژانت و کتانژانت آن منفی است.

نتیجه ۳. این برابری‌ها روشن است:

$$\text{tg}۰^\circ = ۰, \text{tg}۹۰^\circ = \text{بی معنی}, \text{tg}۱۸۰^\circ = ۰, \text{tg}۲۷۰^\circ = \text{بی معنی};$$
$$\cot ۰^\circ = \text{بی‌معنی}, \cot ۹۰^\circ = ۰, \cot ۱۸۰^\circ = \text{بی‌معنی}, \cot ۲۷۰^\circ = ۰$$

نتیجه ۴. برای مقدارهای تانژانت و کتانژانت، محدودیتی وجود ندارد و، هر کدام از آن‌ها، می‌تواند هر مقدار دلخواه را (منفی، مثبت یا صفر) بپذیرد.

در واقع، به عنوان مثال، $\operatorname{tg}\alpha$ را در نظر می‌گیریم:

اگر $\alpha = ۰$، آن وقت $\operatorname{tg}\alpha = ۰$؛ نسبت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، با بزرگ شدن α (به شرطی که از ۹۰ درجه نگذرد)، بزرگ می‌شود، زیرا صورت کسر بزرگتر و مخرج آن کوچکتر می‌شود. هر چه زاویه به ۹۰ درجه نزدیک‌تر باشد، نسبت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، یعنی $\operatorname{tg}\alpha$ بزرگتر می‌شود. به همین ترتیب می‌توان در ربع‌های دیگر دایرهٔ مثلثاتی (چه برای تانژانت و چه برای کتانژانت)، نوع بستگی مقدار $\operatorname{tg}\alpha$ یا $\cot\alpha$ را با زاویهٔ α مشخص کرد (خودتان این بحث را ادامه دهید و کامل کنید).

۵. تانژانت و کتانژانت روی دایرهٔ مثلثاتی. به شکل ۲۳ توجه کنید، در آن

$$\overset{\frown}{AM}=\alpha, \overline{OP}=\overline{QM}=\cos\alpha, \overline{OQ}=\overline{PM}=\sin\alpha$$

در ضمن، نیم‌خط راست OM، خط راستِ مماسِ در نقطهٔ A را در T و مماسِ در نقطهٔ B را در S قطع کرده است.

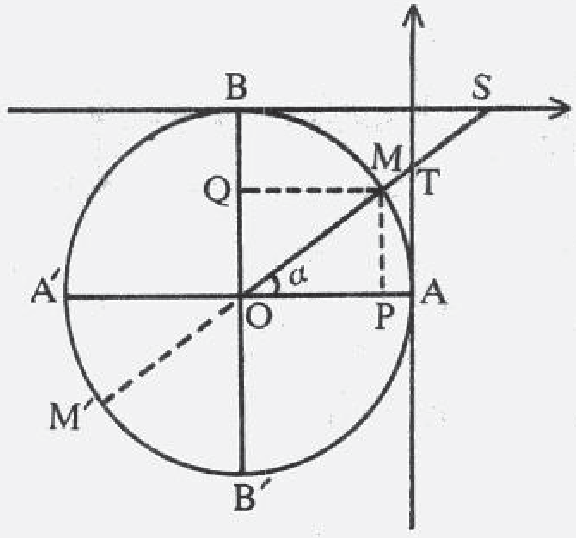
دو مثلث OPM و OAT متشابه‌اند، پس

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \overline{AT}=\operatorname{tg}\alpha$$

(چون $\overline{OA}$، شعاع دایرهٔ مثلثاتی و برابر واحد است).

همچنین، از تشابه مثلث‌های OMQ و OSB نتیجه می‌شود:

$$\overline{BS}=\cot\alpha$$



شکل ۲۳

تانژانت روی مماسِ در نقطهٔ A (مبداء کمان‌ها) و کتانژانت روی مماس در نقطهٔ B (نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ یا ۹۰ درجه) به دست می‌آید.

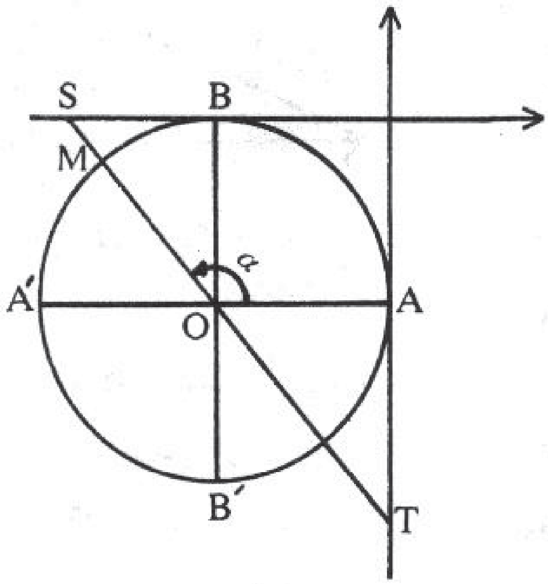
همان طور که $A'A$ (یا دقیق‌تر $x'x$) را محور کسینوس‌ها و $B'B$ (یا $y'y$) را محور سینوس‌ها می‌نامند، مماس در نقطهٔ A را محور تانژانت‌ها و مماس در نقطهٔ B را محور کتانژانت‌ها گویند.

جهت مثبت محور تانژانت‌ها از پایین به بالا و جهت مثبت محور کتانژانت‌ها، از چپ به راست است.

توجه کنید: برای کمان AM' هم (که انتهای آن در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است)، همان $\overline{AT}$ و $\overline{BS}$، برای تانژانت و کتانژانت به دست می‌آید (شکل ۲۳).

در شکل ۲۴، تانژانت و کتانژانتِ کمان AM (که انتهای آن در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است) نشان داده شده است؛ در این شکل، هم تانژانت و هم کتانژانت، مقدارهایی منفی هستند:

$$\text{tg}\alpha = \overline{AT}, \cot\alpha = \overline{BS}$$



شکل ۲۴

§۳. مثلث قائم‌الزاویه و نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده

۱. دوباره به شکل ۲۱ برمی‌گردیم. اگر شعاع دایرهٔ مثلثاتی را، به جای واحد، R می‌گرفتیم، آن وقت داشتیم:

$$\sin\alpha = \frac{|PM|}{|OM|} \text{ و } \cos\alpha = \frac{|OP|}{|OM|} \qquad (۱)$$

اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP را از دایره جدا کنیم، به این نتیجه می‌رسیم:

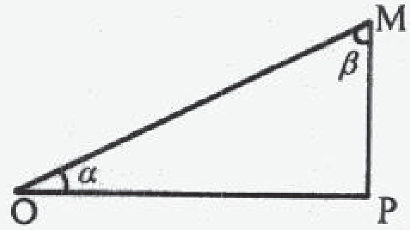
$$\sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{طول وتر}} \text{ و } \cos\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}}$$

همین دستورها را، برای زاویهٔ حادهٔ β هم می‌توان نوشت (شکل ۲۵):

$$\sin\beta = \frac{|OP|}{|OM|} \text{ و } \cos\beta = \frac{|PM|}{|OM|}$$

از همین جا، به این نتیجه می‌رسیم که

$$\sin\alpha = \cos\beta \text{ و } \cos\alpha = \sin\beta$$



شکل ۲۵

یعنی سینوس هر زاویه برابر است با کسینوس زاویهٔ متمم آن و، برعکس، کسینوس هر زاویه برابر است با سینوس زاویهٔ متمم آن.

**یادداشت.* به عمد، از ذکر حاده بودن زاویه خودداری کردیم، زیرا این قانون، برای هر دو زاویهٔ متمم درست است (به دایرهٔ مثلثاتی مراجعه کنید و زاویه‌های متمم مختلفی را در نظر بگیرید و به درستی این قانون قانع شوید). مثلاً، دو زاویهٔ ۱۳۵ درجه و ۴۵− درجه متمم یکدیگرند، زیرا

$$۱۳۵^\circ + (-۴۵^\circ) = ۹۰^\circ$$

و در نتیجه

$$\sin ۱۳۵^\circ = \cos(-۴۵^\circ) \text{ و } \cos ۱۳۵^\circ = \sin(-۴۵^\circ)$$

و به طور کلی

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) \text{ و } \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

(به یاد دارید که $\frac{\pi}{۲}$ رادیان، یعنی ۹۰ درجه).

□

اکنون، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حادهٔ α را، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPM پیدا می‌کنیم:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{|PM|}{|OM|}}{\frac{|OP|}{|OM|}} = \frac{|PM|}{|OP|} = \frac{\text{طول ضلع رو به رو به}\ \alpha}{\text{طول ضلع مجاور}\ \alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{|OP|}{|PM|} = \frac{\text{طول ضلع مجاور}\ \alpha}{\text{طول ضلع رو به رو به}\ \alpha}$$

قانون زاویه‌های متمم، دربارهٔ تانژانت و کتانژانت هم درست است. چون α و β متمم یکدیگرند ($\alpha + \beta = ۹۰^\circ$)، پس

$$\mathrm{tg}\alpha = \cot\beta \ \text{و}\ \cot\alpha = \mathrm{tg}\beta$$

و به طور کلی

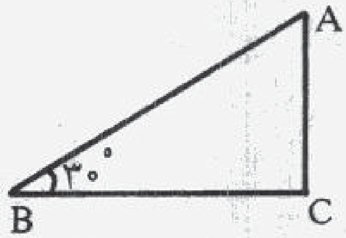
$$\mathrm{tg}\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) \ \text{و}\ \cot\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

۲. محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۲۶، مقدار زاویهٔ B را ۳۰ درجه گرفته‌ایم. می‌دانید، طول ضلع رو به رو به زاویهٔ ۳۰ درجه، در مثلث قائم‌الزاویه، برابر نصف طول وتر است:

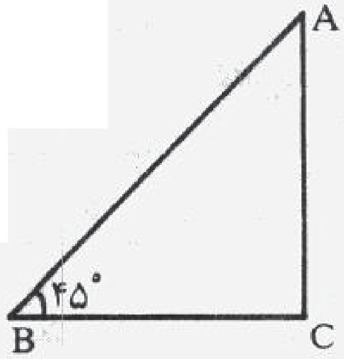
$$|AC| = \frac{۱}{۲}|AB|$$

بنابراین، به سادگی به دست می‌آید:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{۱}{۲} \ \text{و}\ \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$



شکل ۲۶



شکل ۲۷

در همین مثلث قائم‌الزاویه داریم

$$|AC|^{۲} + |BC|^{۲} = |AB|^{۲} \Rightarrow |BC|^{۲} = |AB|^{۲} - \frac{۱}{۴}|AB|^{۲}$$

یعنی $|BC|^{۲} = \frac{۳}{۴}|AB|^{۲}$ و $|BC| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}|AB|$، پس

$$\cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

$$\mathrm{tg}\,۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \mathrm{tg}\,۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

و از شکل ۲۷، که مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی را نشان می‌دهد، به سادگی به دست می‌آید:

$$\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲},$$

$$\mathrm{tg}\,۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ = ۱$$

§۴. چند دستور مهم

۱. نسبت‌های مثلثاتی دیگری هم وجود دارند که از اهمیت کمتری برخوردارند. مثلاً عکس کسینوس را سِکانت و عکس سینوس را کُسِکانت نام گذاشته‌اند و این طور نشان می‌دهند:

$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha}, \operatorname{cosec}\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

ولی ضرورتی ندارد، آنها را در دستورهای مثلثاتی وارد کنیم، چرا که هر جا به وجود آنها نیاز باشد، می‌توان از عکس آنها، یعنی کسینوس و سینوس استفاده کرد.

۲. دستورهایی که برای نسبت‌های مثلثاتی به دست آوردیم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cot\alpha = ۱$$

به ما امکان می‌دهند که: اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی کمان یا زاویه‌ای را در دست داشته باشیم، بقیهٔ نسبت‌ها را به دست آوریم.

مثال. می‌دانیم انتهای کمان $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی و تانژانت آن، برابر $\frac{۱۲}{۵}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاوهٔ α را پیدا کنید.

از برابری $\operatorname{tg}\alpha = \frac{۱۲}{۵}$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\cot\alpha = \frac{۵}{۱۲}$$

اکنون از دستور $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ استفاده می‌کنیم. به ترتیب داریم:

$$\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \operatorname{tg}^۲\alpha \Rightarrow \frac{۱ - \cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{۱۴۴}{۲۵} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۱۴۴\cos^۲\alpha = ۲۵ - ۲۵\cos^۲\alpha \Rightarrow ۱۶۹\cos^۲\alpha = ۲۵$$

از آن‌جا $\cos^۲\alpha = \frac{۲۵}{۱۶۹}$. چون انتهای کمان α در ربع سوم و، بنابراین، کسینوس آن منفی است، به دست می‌آید:

$$\cos\alpha = -\frac{۵}{۱۳}$$

و از برابری $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ و با توجه به منفی بودن سینوس، سرانجام، مقدار سینوس هم پیدا می‌شود:

$$\sin\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$$

۳. در واقع می‌توان هر نسبت مثلثاتی را بر حسب هر نسبت مثلثاتی دیگر پیدا کرد. به عنوان نمونه، مقدار کسینوس را می‌توان بر حسب هر یک از نسبت‌های مثلثاتی دیگر نوشت.

اول. مقدار کسینوس، بر حسب سینوس:

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}$$

که علامت آن، بستگی به جای انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی دارد.

دوم. برای پیدا کردن مقدار کسینوس بر حسب تانژانت، دو طرف برابری

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

را بر $\cos^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم (به شرط $\cos\alpha \neq ۰$):

$$\operatorname{tg}^۲\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

که می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$\cos^۲ \alpha = \frac{۱}{۱ + \text{tg}^۲ \alpha}$$

سوم. شبیه بالا، می‌توان مقدار کسینوس را بر حسب کتانژانت به دست آورد

$$\cos^۲ \alpha = \frac{\cot^۲ \alpha}{۱ + \cot^۲ \alpha}$$

خودتان، به عنوان تمرین، مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، تانژانت و کتانژانت را، بر حسب سایر نسبت‌ها پیدا کنید.

۴. از بین همهٔ دستورهایی که، یکی از نسبت‌های مثلثاتی را بر حسب یکی از نسبت‌های مثلثاتی دیگر می‌دهند، دو دستور را باید به خاطر سپرد، چرا که در بسیاری جاها، می‌توانند کار حل مساله را ساده کنند. این دو دستور چنین‌اند:

$$\frac{۱}{\cos^۲ \alpha} = ۱ + \text{tg}^۲ \alpha$$

$$\frac{۱}{\sin^۲ \alpha} = ۱ + \cot^۲ \alpha$$

§۵. چند مثال

با همین مقدار آگاهی که از مثلثات پیدا کردیم، می‌توانیم تمرین‌های گوناگون را در مثلثات حل کنیم. در این‌جا، چند نمونه از آن‌ها را آورده‌ایم.

مثال ۱. مقدار A را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$A = \text{tg}\,۱^\circ \text{tg}\,۲^\circ \text{tg}\,۳^\circ \ldots \text{tg}\,۸۷^\circ \text{tg}\,۸۸^\circ \text{tg}\,۸۹^\circ$$

عبارت A را می‌توان این طور نوشت:

$$A = (\text{tg}۱^\circ \text{tg}۸۹^\circ)(\text{tg}۲^\circ \text{tg}۸۸^\circ)(\text{tg}۳^\circ \text{tg}۸۷^\circ)\dots$$
$$\dots(\text{tg}۴۴^\circ \text{tg}۴۶^\circ) \cdot \text{tg}۴۵^\circ$$

می‌دانیم، برای دو زاویه‌ای که مجموعی برابر ۹۰ درجه داشته باشند (دو زاویهٔ متمم)، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. در همهٔ حالت‌هایی که زاویه از ۴۵ درجه بیشتر است، تانژانت زاویه را به کتانژانت متمم آن تبدیل می‌کنیم؛ به دست می‌آید:

$$A = (\text{tg}۱^\circ \cot ۱^\circ)(\text{tg}۲^\circ \cot ۲^\circ)\dots(\text{tg}۴۴^\circ \cot ۴۴^\circ) \cdot \text{tg}۴۵^\circ$$

که با توجه به دستور $\text{tg}\alpha \cot \alpha = ۱$، سرانجام خواهیم داشت:

$$A = \text{tg}۴۵^\circ = ۱$$

مثال ۲. *اگر بدانیم مجموع سینوس و کسینوس زاویه‌ای برای a است. مقدار حاصل ضرب سینوس و کسینوس این زاویه را پیدا کنید.*

می‌دانیم $\sin x + \cos x = a$. با مجذور کردن دو طرف این برابری، به دست می‌آید:

$$\sin^۲ x + ۲\sin x \cos x + \cos^۲ x = a^۲ \Rightarrow ۱ + ۲\sin x \cos x = a^۲$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود: $\sin x \cos x = \frac{a^۲ - ۱}{۲}$.

مثال ۳. حاصل این عبارت را پیدا کنید:

$$M = ۳(\sin^۴ x + \cos^۴ x) - ۲(\sin^۶ x + \cos^۶ x)$$

به ترتیب، مقدارهای درون هر یک از دو پرانتز را ساده می‌کنیم.

$$1)\ \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$
$$2)\ \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 -$$
$$-3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

بنابراین

$$M = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) =$$
$$3 - 6\sin^2 x \cos^2 x - 2 + 6\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

مثال ۴. *x زاویه‌ای است مثبت و حاده و می‌دانیم*

$$\mathrm{tg}(x - 42^\circ) + \cot(132^\circ - x) = 2 \qquad (1)$$

مقدار زاویهٔ x را پیدا کنید.

از آن جا که

$$(x - 42^\circ) + (132^\circ - x) = 132^\circ - 42^\circ = 90^\circ$$

بنابراین

$$\cot(132^\circ - x) = \mathrm{tg}(x - 42^\circ)$$

و برابری (۱)، به این صورت درمی‌آید:

$$2\mathrm{tg}(x - 42^\circ) = 2 \Rightarrow \mathrm{tg}(x - 42^\circ) = 1$$

یعنی $x - 42^\circ = 45^\circ$ و $x = 87^\circ$ (تانژانت ۲۲۵ درجه هم، برابر واحد است، ولی در آن صورت، برای x، زاویه‌ای حاده به دست نمی‌آید).

مثال ۵. اگر بدانیم

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = a \\ \sin\alpha - \cos\alpha = b \end{cases}$$

چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟

در واقع، می‌خواهیم رابطه‌ای بین a و b پیدا کنیم که، در آن، نسبت‌های مثلثاتی α وجود نداشته باشد. در این گونه تمرین‌ها، معمول شده است که پرسش مساله را، این طور می‌دهند: *رابطه‌ای مستقل از α، بین a و b پیدا کنید.*

از مجموع و تفاضل دو برابری داده شده، به سادگی به دست می‌آید:

$$\sin\alpha = \frac{۱}{۲}(a+b), \cos\alpha = \frac{۱}{۲}(a-b)$$

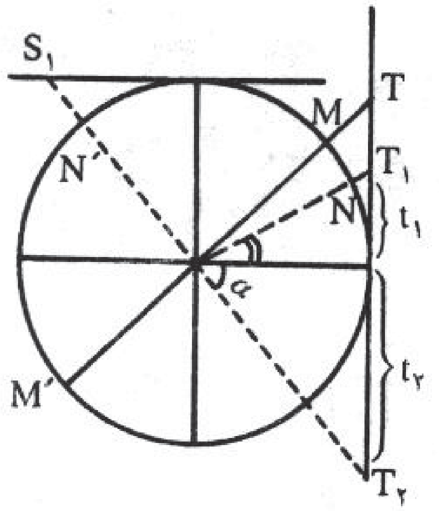
ولی می‌دانیم: $\sin\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$، بنابراین

$$\frac{۱}{۴}(a+b)^{۲} + \frac{۱}{۴}(a-b)^{۲} = ۱ \Rightarrow a^{۲} + b^{۲} = ۲$$

***مثال ۶.** *x زاویه‌ای است مثبت و کوچکتر از ۳۶۰ درجه و می‌دانیم: $\mathrm{tg}x = a$. ثابت کنید، برای $\mathrm{tg}\frac{x}{۲}$ دو جواب به دست می‌آید که حاصل‌ضرب آن‌ها، به a بستگی ندارد.*

در شکل ۲۸، مقدار $\mathrm{tg}x$، یعنی a را مثبت گرفته‌ایم (استدلال، برای حالتی که a منفی باشد، تفاوتی با این حالت ندارد. خودتان، شکل را برای حالت $a < ۰$ رسم و استدلال را دنبال کنید). اگر $|AT| = a$ بگیریم، دو کمانِ بین ۰ درجه و ۳۶۰ درجه وجود دارند که تانژانت آن‌ها، برابر a است: کمان‌های AM و AM'. در ضمن

$$\overset{\frown}{AM'} = ۱۸۰^{\circ} + \overset{\frown}{AM}$$



شکل ۲۸

وسط کمان AM را N و وسط کمان AM' را N' می‌نامیم. اگر فرض کنیم $\widehat{AM}=\alpha$، آن وقت

$$\widehat{AN}=\frac{\alpha}{۲} \text{ و } AN'=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$$

در ضمن، با توجه به شکل ۲۸

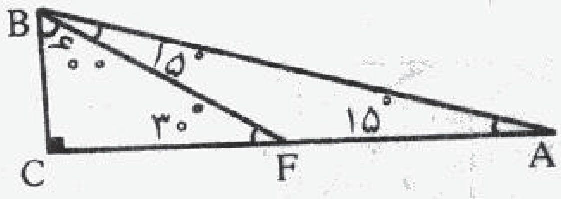
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}=|AT_۱|=t_۱;\operatorname{tg}\left(۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)=-(AT_۲)=-t_۲$$

$t_۱$ و $t_۲$ مقدارهای $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}$ هستند؛ ولی

$$t_۲=\operatorname{tg}\left(۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)=\cot\left(-\frac{\alpha}{۲}\right)$$

زیرا $۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$ متمم $-\frac{\alpha}{۲}$ است (مجموع آن‌ها بر ۹۰ درجه است). در ضمن انتهای کمان $-\frac{\alpha}{۲}$ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی است، بنابراین

$$t_۲=\cot\left(-\frac{\alpha}{۲}\right)=-\cot\frac{\alpha}{۲}$$



شکل ۲۹

به این ترتیب، حاصل ضرب دو جوابی که برای $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}$ به دست می‌آید، یعنی حاصل ضرب $t_۱$ و $t_۲$، چنین خواهد شد:

$$t_۱ \cdot t_۲ = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}\left(-\cot\frac{\alpha}{۲}\right) = -۱$$

و می‌بینیم، این حاصل ضرب، برابر مقدار ثابت ۱− است و به مقدار a بستگی ندارد.

*مثال ۷. *مطلوب است محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۱۵ درجه و ۷۵ درجه.*

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ به راس A را برابر ۱۵ درجه و زاویهٔ به راس B را برابر ۷۵ درجه گرفته‌ایم (شکل ۲۹). اگر $\widehat{ABF}$ را برابر ۱۵ درجه جدا کنیم، مثلث ABF متساوی‌الساقین می‌شود $|BF| = |FA|$. در نتیجه (چون $\widehat{BFC} = ۳۰°$):

$$|BF| = |FA| = ۲|BC|$$

و با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ BCF، به دست می‌آید:

$$|CF| = |BC|\sqrt{۳}$$

اکنون، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$\operatorname{tg}۱۵° = \operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|BC|}{|AF| + |FC|} =$$

$$= \frac{|BC|}{۲|BC| + |BC|\sqrt{۳}} = \frac{|BC|}{|BC|(۲+\sqrt{۳})} = \frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

و یا، اگر صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۳} - ۲$ ضرب کنیم:

$$\text{tg}\,۱۵^\circ = \cot ۷۵^\circ = ۲ - \sqrt{۳}$$

با در دست داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی، می‌توان بقیه را هم به دست آورد:

$$\cot ۱۵^\circ = \text{tg}۷۵^\circ = ۲ + \sqrt{۳},$$
$$\sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴},$$
$$\cos ۱۵^\circ = \sin ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

*§۶. مثلثات، به طور عمده، زیر تاثیر نیازهای اخترشناسی پدید آمد

واژهٔ «مثلثات» از «مثلث» آمده است و ترجمه‌ای است از واژهٔ فرانسوی هم‌ارز آن، که به معنای «اندازه‌گیری مثلث» است. در زبان فارسی، به جای «مثلثات»، از واژهٔ «سه‌بروارگان» استفاده کرده‌اند.

از نام‌گذاری «مثلثات» می‌توان حدس زد که، این شاخه از ریاضیات، دست کم در آغاز پیدایش خود، به نحوی با «مثلث» و مساله‌های مربوط به مثلث بستگی داشته است.

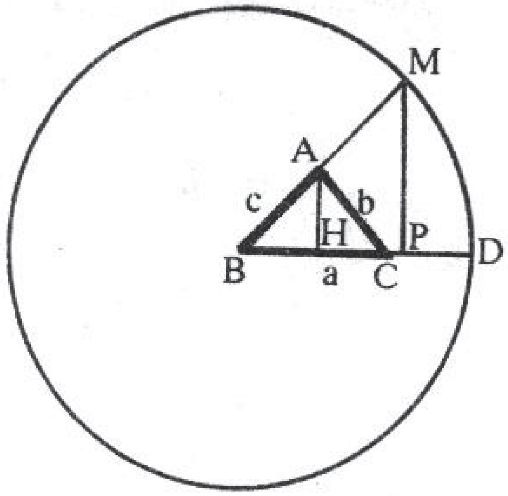
در واقع، پیدایش و پیشرفت مثلثات را، باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضی‌دانان، در جهت رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که، در هندسه و در اخترشناسی، رو به روی دانشمندان بوده است. درضمن، دشواری‌های هندسی، خود ناشی از مساله‌هایی بوده است که در اختر شناسی با آن رو به رو می‌شده‌اند و بیشتر جنبهٔ محاسبه‌ای داشته‌اند.

پیش از این، در جلد اول (صفحه ۱۸۸)، یادآوری کرده بودیم که ریاضی‌دانان یونانی، بیشتر به هندسه توجه داشتند و کمتر به محاسبه می‌پرداختند. در اخترشناسی، برای تعیین جا و موقعیت ستارگان، فاصله‌های آن‌ها از یکدیگر و سایر ویژگی‌های آن‌ها، به عدد نیاز داشتند، ولی در راه‌حل هندسی، پاسخ را مثلاً به صورت یک پاره‌خط راست به ما می‌دهد و، در نتیجه، کار اخترشناسان را دشوار می‌کرد.

نمونه‌ای از هندسه بیاوریم. فرض کنیم، از مثلث ABC، زاویه‌های A و B و طول ضلع AB داده شده باشد. چگونه می‌توانیم طول هر یک از ضلع‌های BC و AC را پیدا کنیم؟

در هندسه، راهی ساده برای رسم این مثلث وجود دارد و، در نتیجه، ضلع‌های BC و AC به صورت پاره‌خط‌های راستی به دست می‌آیند. رسم مثلث و، سپس، اندازه‌گیری طول‌های دو ضلع مجهول را نمی‌توان با دقت ریاضی به دست آورد، زیرا رسم و اندازه‌گیری به یاری ابزارهایی مثل خط‌کش و نقاله و پرگار انجام می‌گیرد؛ هم این ابزارها دقت ریاضی ندارند و هم چشم ما اشتباه می‌کند. برای پیدا کردن پاسخ دقیق، محاسبه لازم است و، این محاسبه، در حالت کلی نیاز به مثلثات دارد.

سعی می‌کنیم، این مساله را حل کنیم. ولی پیش از آن باید دستور مثلثاتی مربوط به آن را پیدا کنیم. دستور مثلثاتی را با همان روشی پیدا می‌کنیم که، ابوریحان بیرونی، در هزار سال پیش پیدا کرد. در مثلث ABC، زاویه‌ها را $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ و طول ضلع‌های رو به رو به آن‌ها را، به ترتیب a، b و c می‌نامیم. به مرکز راس B و به شعاع برابر واحد، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در D و امتداد ضلع BA را در M قطع کند (شکل ۳۰). این دایره را، که شعاع آن واحد است، دایرهٔ مثلثاتی می‌گیریم که، در آن، نقطهٔ D، مبداء کمان‌هاست. بنابراین، سینوس کمان DM یا سینوس زاویهٔ B، برابر طول پاره‌خط راست PM است (PM بر امتداد BC عمود



شکل ۳۰

است)

$$\sin \hat{B} = |PM|$$

اگر AH، ارتفاع مثلث ABC را رسم کنیم، از تشابه دو مثلث ABH و MBP به دست می‌آید:

$$|AB| : |AH| = |BM| : |PM|$$

$$\frac{c}{|AH|} = \frac{۱}{\sin \hat{B}} \qquad (۱)$$

به همین ترتیب، اگر دایره‌ای به مرکز راس C و به شعاع برابر واحد رسم کنیم (این دایره را در شکل ۳۰ رسم نکرده‌ایم)، به دست می‌آید:

$$\frac{b}{|AH|} = \frac{۱}{\sin \hat{C}} \qquad (۲)$$

و از تقسیم برابری‌های (۱) و (۲) بر یکدیگر:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

و اگر همین روش را، دربارهٔ دو زاویهٔ A و B به کار بریم، سرانجام به دست می‌آید:

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}}=\frac{b}{\sin \widehat{B}}=\frac{c}{\sin \widehat{C}} \qquad (۳)$$

برابری‌های (۳)، در هر مثلث دلخواه برقرارند و به **رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث** مشهور شده‌اند.

همین برابری‌ها، کلید حل مسالهٔ ما هستند. مساله را به صورت مشخص‌تری می‌آوریم.

مثال ۸. در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\widehat{B}=۶۰^\circ, \widehat{C}=۴۵^\circ, c=|AB|=۲$$

طول هر یک از ضلع‌های $|BC|=a$ و $|AC|=b$ را پیدا کنید.

روشن است که $\widehat{A}=۷۵^\circ$ (چون مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است). در برابری

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}}=\frac{c}{\sin \widehat{C}} \qquad (۱)$$

مقدارهای $\widehat{c}$ و $\sin \widehat{B}$ و $\sin \widehat{C}$ را قرار می‌دهیم:

$$c=۲, \sin \widehat{B}=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \sin \widehat{C}=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

به ترتیب به دست می‌آید:

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}} \Rightarrow b\sqrt{۲}=۲\sqrt{۳} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}$$

و اگر مقدار $\sin ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ را به حساب آوریم (حل مثال ۷ را ببینید)، آن وقت با معلوم بودن طول ضلع b، از برابری

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$$

طول ضلع $a = |BC|$ به دست می‌آید. داریم:

$$\frac{۴a}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۲a}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۲a = \sqrt{۱۲} + ۲ = ۲\sqrt{۳} + ۲ \Rightarrow a = \sqrt{۳} + ۱$$

از مثلثی دو زاویه و طول ضلع بین آن‌ها معلوم بود، توانستیم مقدار زاویهٔ سوم و طول‌های دو ضلع دیگر را به دست آوریم. در این موردها می‌گویند: مثلث را حل کرده‌ایم. حل مثلث، یعنی *پیدا کردن ضلع‌ها و زاویه‌های نامعلوم از روی ضلع‌ها و زاویه‌های معلوم؛ و حل مثلث، در حالت‌های کلی خود، به یاری مثلثات ممکن است.*

□

در اخترشناسی، اغلب به مساله‌هایی برمی‌خوریم که، برای حل آن‌ها، به مثلثات و دستورهای آن نیاز داریم. ساده‌ترینِ این مساله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره (بر حسب درجه) است، وقتی که شعاع دایره و طول وتر این کمان معلوم باشد؛ یا برعکس، پیدا کردن طول وتری که شعاع دایره و کمان آن وتر در دست باشد.

شما می‌دانید که سینوس یک کمان، از لحاظ قدر مطلق، برابر با نصف طول وتر دو برابر آن کمان است (روی دایرهٔ مثلثاتی، نشان دهید). همین

تعریف ساده، اساس رابطهٔ بین کمان‌ها و وترها را در دایره، تشکیل می‌دهد و، مثلثات هم، از همین جا آغاز شد.

کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و، در آن، طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است، متعلق به‌هیپارک اخترشناس سدهٔ دوّم میلادی است. و شاید بتوان، تنظیم این جدول‌ها را، گام نخستینِ کوچکی، در راه پیدایش مثلثات دانست.

مِنه‌لائوسِ ریاضی‌دان و بطلمیوس اخترشناس هم (هر دو، در سدهٔ دوم میلادی)، در این زمینه، نوشته‌هایی از خود باقی گذاشته‌اند. ولی همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اختر شناسان یونانی، در درون هندسه انجام می‌گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند.

نخستین گام اصلی به وسیلهٔ آریابهاتا، ریاضی‌دان هندی سدهٔ پنجم میلادی برداشته شد که، در واقع، تعریفی برای نیم وتر یک کمان (یعنی، همان سینوس) داد . . . از این به بعد، به تقریب همهٔ کارهای مربوط به شکل‌گیری مثلثات (چه در روی صفحه و چه در روی کره) به وسیلهٔ دانشمندان ایرانی انجام گرفت. خوارزمی (محمد فرزند موسا) نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و، پس از او، همهٔ ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی (محمد فرزند عبدالله)، جدول سینوس‌ها را ۳۰ دقیقه به ۳۰ دقیقه (به تقریب) تنظیم کرد و، برای نخستین بار، به دلیل نیازهای اخترشناسی، مفهوم تانژانت را (که ظِل می‌نامیدند) تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها، به وسیلهٔ ابوریحان بیرونی و الوفای بوزجانی (بوزجان، همان تربت جام امروزی است) انجام گرفت که توانستند پیچیده‌ترین دستورهای مثلثاتی را پیدا کنند و جدول‌های سینوسی و تانژانتی را با دقت بیشتری تنظیم کنند (ابوالوفا، با روش جالبی، به یاری نابرابری‌ها، توانست مقدار سینوس کمان ۳۰ دقیقه را پیدا کند) و، سرانجام، خواجه‌نصیرتوسی، با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از

خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از توسی، جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی زمان تیموریان، با روش زیبائی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه ـ با هر دقت دلخواه ـ پیدا کند.

پیشرفت بعدی دانش مثلثات، از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

تمرین‌ها

۸۲. این کمان‌ها را بر حسب رادیان بنویسید:

۱۵ درجه، ۳۰ درجه، ۴۵ درجه، ۶۰ درجه، ۱۲۰ درجه، ۱۳۵ درجه، ۱۵۰ درجه، ۱۹۵ درجه، ۲۲۵ درجه، ۲۴۰ درجه، ۲۵۵ درجه، ۲۸۵ درجه، ۳۰۰ درجه، ۳۱۵ درجه، ۳۳۰ درجه، ۳۴۵ درجه، ۳۷۵ درجه، ۴۱۴ درجه، ۵۴۰ درجه، ۶۱۲ درجه.

۸۳. این کمان‌ها را بر حسب درجه بنویسید (کمان‌ها بر حسب رادیان داده شده‌اند، نام واحد رادیان ذکر نشده است):

$$\frac{\pi}{12}\ ،\ \frac{\pi}{8}\ ،\ \frac{5\pi}{12}\ ،\ \frac{7\pi}{4}\ ،\ \frac{5\pi}{9}\ ،\ \frac{17\pi}{24}\ ،\ 2\ ،\ 5$$

۸۴. کوچکترین کمان مثبت $\widehat{AM}$ را α درجه می‌گیریم:

الف) ثابت کنید برای نقطه N از کمان $\widehat{AN}=\frac{1}{2}\widehat{AM}$ دو جواب به دست می‌آید که در دو سر یک قطر از دایره‌اند.

*ب) ثابت کنید برای نقطهٔ P، انتهای کمان $\frac{1}{3}\widehat{AM}$، سه جواب به دست می‌آید که راس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

*ج) ثابت کنید، به طور کلی، برای نقطهٔ Q، انتهای کمان

$$\widehat{AQ}= \frac{۱}{n}\ \widehat{AM}$$

n جواب به دست می‌آید که راس‌های یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

۸۵. از سه زاویهٔ یک مثلث، یکی برابر $۶۳۰x$ درجه، دیگری برابر $۲۷۰۰x$ گراد و سومی برابر πx رادیان است. زاویه‌های مثلث‌را، برحسب درجه، به دست آورید.

۸۶. از $\sin ۱$، $\sin ۲$ و $\sin ۳$، کدام از همه کوچکتر و کدام از همه بزرگتر است؟ (زاویه‌ها بر حسب رادیان هستند).

*۸۷. عددهای زیر را، به طور صعودی (یعنی از کم به زیاد) منظم کنید (کمان‌ها بر حسب رادیان‌اند):

$$\sin ۱, \sin ۲, \sin ۳, \sin ۴, \sin ۵, \sin ۶, \sin ۷$$

*۸۸. می‌دانیم، α زاویه‌ای حاده است $\cos \alpha = ۰/۲۵$. آیا می‌توانید مرزهایی برای زاویهٔ α پیدا کنید؟ مثلاً روشن است که α از ۶۰ درجه بزرگتر است، زیرا $\cos ۶۰ = ۰/۵$ و هر چه زاویه بزرگتر باشد، کسینوس آن کوچکتر است:

$$۶۰^\circ < \alpha^\circ < ۹۰^\circ$$

این محدوده را تنگ‌تر کنید.

*۸۹. انتهای کمان α در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است و می‌دانیم:

$$\mathrm{tg}\alpha = ۳/۷۵$$

مقدار کمان α بین کدام دو کمان است؟

۹۰. انتهای کمان α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است، در هر یک از حالت‌های زیر، سایر نسبت‌های مثلثاتی کمان α را پیدا کنید:

۱) $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$؛ ۲) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{۵}{۱۲}$؛ ۳) $\cos\alpha = -\frac{۹}{۴۱}$.

۹۱. α زاویه‌ای مثبت و حاده است؛ کدام بزرگترند:

الف) $\cos\alpha$ یا $\cos ۲\alpha$؛ ب) $\sin\alpha$ یا $\sin ۲\alpha$؟

۹۲. α زاویه‌ای است حاده و مثبت و می‌دانیم:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = ۱/۴$$

مقدار هر یک از نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا کنید.

۹۳. α زاویه‌ای است حاده و می‌دانیم:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{۶۰}{۱۶۹}$$

مقدار $\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha$ را پیدا کنید.

۹۴. مقدار A را محاسبه کنید، به شرطی که بدانیم:

$$A = ۴\sin\frac{۱۷\pi}{۶} + ۲\cos\frac{۷\pi}{۳} - ۵\operatorname{tg}\frac{۱۷\pi}{۴} - \cot\frac{۱۳\pi}{۴}$$

۹۵. ساعت یک ربع بعد از ظهر است. زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار، چقدر است؟

۹۶. k عددی است درست (مثبت، منفی یا صفر). $\sin\frac{k\pi}{۷}$ چند مقدار مختلف می‌تواند اختیار کند؟ $\cos\frac{۲k\pi}{۵}$ چطور؟

۹۷. m و n، دو عدد درست و مثبت هستند. ثابت کنید، برای هر زاویهٔ α، همیشه داریم:

$$\cos\alpha \leq \frac{m^۲ + n^۲}{۲mn}$$

۹۸. می‌دانیم $\sin^{2}\alpha = \frac{(a+b)^{2}}{4ab}$. زاویه مثبت α را که از ۳۶۰ درجه کوچکتر است، پیدا کنید.

۹۹. می‌دانیم:

$$\cos\alpha + \cos\beta = a, \sin\alpha + \sin\beta = b$$

مقدار $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ را محاسبه کنید.

۱۰۰. اگر داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ و } \cos y = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

چه رابطه‌ای بین x و y وجود دارد؟

*۱۰۱. با فرض $\operatorname{tg}x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$، مطلوب است محاسبهٔ

$$\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$$

بر حسب مقدارهای مثبت a و b (انتهای کمان x، در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی است).

۱۰۲. بین دو معادلهٔ

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ a'\sin x + b'\cos x = c' \end{cases}$$

x را حذف کنید (به اصطلاح ریاضی‌دانان: رابطه‌ای مستقل از x پیدا کنید؛ به زبان ساده، رابطه‌ای را که بین ضرب‌های a، b، c، a'، b' و c' وجود دارد، به دست آورید).

۱۰۳. آیا برابری زیر، یک اتحاد است:

$$\sqrt{\frac{۱}{۱-\sin^۲ x}-۱}=\operatorname{tg}x$$

*۱۰۴. حاصل این عبارت را به دست آورید $(۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ)$

$$A=\left(\sqrt{\frac{۱-\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۱-\cos\alpha}}\right)$$

۱۰۵. اتحاد $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}$ را، برای حالت زاویهٔ حاده و مثبت α، به کمک شکل ثابت کنید.

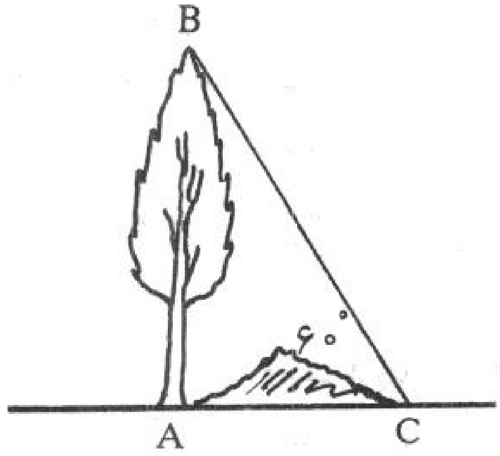
*۱۰۶. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ داریم:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{۲\pi}{n}+\cos\frac{۳\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-۱)\pi}{n}=۰$$

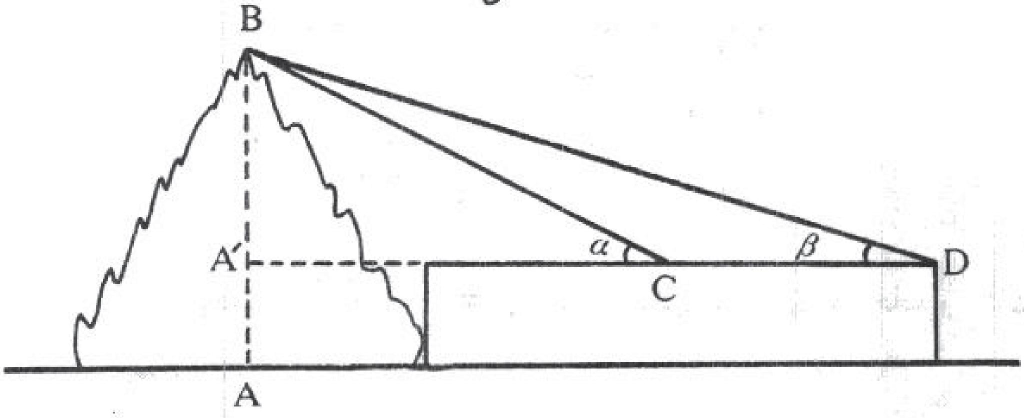
۱۰۷. درازای سایهٔ درختی، برابر ۲ متر است. از انتهای سایهٔ درخت، زاویهٔ فراز راس درخت را اندازه گرفته‌ایم، برابر ۶۰ درجه شده است. ارتفاع درخت را پیدا کنید (شکل ۳۱).

یادداشت. وسیله‌ای وجود دارد، به نام زاویه یاب که، به کمک آن، می‌توان زاویهٔ بین صفحهٔ افقی و خط راستی را که از نقطهٔ دید زاویه یاب و ارتفاع مورد نظر می‌گذرد، اندازه گرفت. این زاویه را، **زاویه فراز ارتفاع**، در نقطهٔ اندازه گیری گویند.

۱۰۸. می‌خواهیم ارتفاع AB از یک بلندی را محاسبه کنیم، نه راس بلندی در دسترس است و نه پای عمودی که از آن بر سطح زمین فرود می‌آید.



شکل ۳۱



شکل ۳۲

زاویه یاب را، که ارتفاع سه پایهٔ زیر آن، برابر یک متر است، جلو و عقب برده‌ایم، در نقطه C، زاویهٔ فراز بلندی برابر α و در نقطهٔ D برابر β شده است. طول پاره‌خط راست CD، که امتداد آن، بر ارتفاع بلندی، یعنی BA عمود است، برابر a متر است. ارتفاع BA را محاسبه کنید (شکل ۳۲).

۱۰۹. در مثلث ABC، طول شعاع دایرهٔ محاطی را r و

$$|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a, \widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \gamma$$

می‌گیریم. ثابت کنید:

$$r = a : \left(\cot\frac{\beta}{۲} + \cot\frac{\gamma}{۲}\right) = b : \left(\cot\frac{\alpha}{۲} + \cot\frac{\gamma}{۲}\right) =$$

$$= c : \left(\cot \frac{\alpha}{۲} + \cot \frac{\beta}{۲}\right)$$

*۱۱۰. در مثلث ABC، میانهٔ CM طولی برابر ۱، ارتفاع AD طولی برابر ۱ و ارتفاعی که از راس B می‌گذرد، طولی برابر $\sqrt{۳}$ دارد. مساحت مثلث را پیدا کنید.

۱۱۱. اگر x، زاویه‌ای حاده و مثبت باشد ($۰° < x < ۹۰°$)، مقدار x را از معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$\operatorname{tg}^{۲} x = \frac{۱ - \cos x}{۱ - \sin x}$$

۱۱۲. اگر داشته باشیم

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = m \\ \sin^{۳} x + \cos^{۳} x = n \end{cases}$$

چه رابطه ای بین m و n وجود دارد؟

۱۱۳. می‌دانیم $a = ۱ + \sin^{۲} x$ و $b = ۱ + \cos^{۲} x$. ثابت کنید:

$$۲(a^{۳} + b^{۳}) + ۹b^{۲} = ۲۷(۱ + \cos^{۴} x)$$

۱۱۴. اگر $\sec x$ به معنای $\frac{۱}{\cos x}$ (سِکانت) و $\operatorname{cosec} x$ به معنای $\frac{۱}{\sin x}$ (کُسِکانت) باشد، درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۱ + \operatorname{tg} x + \cot x}{\sec^{۲} x + \operatorname{tg} x} - \frac{\cot x}{\operatorname{cosec}^{۲} x + \operatorname{tg}^{۲} x - \cot^{۲} x} = \sin x \cos x$$

۱۱۵. ثابت کنید کسر $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \cot x}$، به ازای هر مقدار قابل قبول x، همیشه مثبت است.

*۱۱۶. n عددی است طبیعی که، در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. ثابت کنید:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{۷}-\frac{۱۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۳n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+$$
$$+\cos\left(\frac{۵n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)=۰$$

*۱۱۷. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$\frac{\sin^{۴} x}{a}+\frac{\cos^{۴} x}{b}=\frac{۱}{a+b}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^{۸} x}{a^{۳}}+\frac{\cos^{۸} x}{b^{۳}}=\frac{۱}{(a+b)^{۳}}$$

(a و b، عددهایی مثبت‌اند).

*۱۱۸. مقدارهای a، b و c را، در اتحاد زیر پیدا کنید:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-۱}=a\sin x+b\cos x+c$$

۱۱۹. ثابت کنید، مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن، در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

۱۲۰. اگر داشته باشیم $\mathrm{tg}\alpha=-۷$، مطلوب است محاسبهٔ

$$\frac{۳\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-۳\sin\alpha}$$

۳. نمودارها

§۱. نمودار یعنی چه؟

۱. در طبیعت و در زندگی، کمتر پیش می‌آید که، با کمیت‌های ثابت و بی تغییر رو به رو شوید. به نظرتان می‌رسد، کوه‌ها، دریاها و قاره‌ها، پایدار و ثابت‌اند. ولی چنین نیست و، با اندک آگاهی از زمین شناسی تاریخی، قانع می‌شویم که، آن‌ها هم، در طول زمان، دچار دگرگونی‌های بسیار می‌شوند. در درازای زمانی که انسان وجود داشته است (و از بلیون‌ها سال پیش از آن)، خورشید، به همین صورتی که امروز است، طلوع و غروب می‌کند و به ظاهر بدون تغییر، به نظر می‌رسد. ولی در واقع، در هر ثانیه، نزدیک به ۴ میلیون تن از وزن خود را از دست می‌دهد. با وجود این، چنان عظیم است که تا ملیون‌ها سال دیگر، به فعالیت خود ادامه خواهد داد (حجم آن، نزدیک به یک میلیون و سیصد هزار برابر حجم زمین است). نمونه‌های ساده‌تری بیاوریم.

درجهٔ حرارت هوا، در شهری که زندگی می‌کنید، ثابت نیست، قیمت کالاها تغییر می‌کند، طول ستون جیوه، در گرماسنج، بالا و پایین می‌رود و ... یکی از فیلسوفان یونان باستان، به درستی می‌گفت: «تنها یک بار می‌توان در یک رودخانه شنا کرد، زیرا، بار دومی که به آن‌جا برویم، نه آب، آب قبلی

است، نه شن‌های کف رودخانه ثابت مانده‌اند و نه کناره‌های آب در همان وضع قبلی است». همه چیز در حال تغییر است، هیچ چیزِ ثابتی وجود ندارد. «حرکت و تغییر، قانون هستی و در ذات طبیعت است».

می‌گوییم، درجهٔ حرارت هوا، متغیر است؛ طول ستون جیوه هم، در گرماسنج، متغیر است؛ ولی، این دو متغیر، جدا از هم عمل نمی‌کنند: گرم شدن هوا، موجب بالا رفتن سطح جیوه در گرماسنج و خنک‌تر شدن هوا، موجب پایین آمدن آن می‌شود. در این جا با دو متغیر سروکار داریم: درجهٔ حرارت هوا و طول ستون جیوه. ولی این دو متغیر به هم بستگی دارند و، اگر دقیق‌تر بگوییم: تغییر درجهٔ حرارت هوا، موجب تغییر طول ارتفاع ستون جیوه در گرماسنج می‌شود. البته، تغییر درجهٔ حرارت هوا هم، بستگی به عامل‌های دیگری دارد. ولی اگر تنها همین دو متغیر (یعنی درجهٔ حرارت هوا و طول ستون جیوه) را در نظر بگیریم، می‌توان به نحوی بین آن‌ها فرق گذاشت: درجهٔ حرارت هوا به طور مستقل عمل می‌کند (یعنی اگر به عنوان مثال، با کم یا زیاد کردن فشار، طول ستون جیوه را تغییر دهیم، درجهٔ حرارت هوا، از آن پیروی نمی‌کند و زیاد یا کم نمی‌شود)؛ در حالی که، اگر درجهٔ حرارت هوا را تغییر دهیم، طول ستون جیوه، از آن پیروی می‌کند و دچار تغییر می‌شود. متغیر اول (یعنی درجهٔ حرارت هوا) را متغیر مستقل، و متغیر دوم (یعنی طول ستون جیوه) را متغیر تابع می‌نامیم و، بدون این که وارد تعریف‌های دقیق شویم، می‌گوییم: *طول ستون جیوه، تابعی از درجهٔ حرارت هوا است.*

معمول شده است که واژهٔ «مستقل» را از «متغیر مستقل» و واژهٔ «متغیر» را از «متغیر تابع» کنار می‌گذارند و می‌گویند: *درجهٔ حرارت هوا متغیر، و طول ستون جیوه تابع آن است.*

در این جا وارد بحث دقیق دربارهٔ دو مفهوم متغیر و تابع نمی‌شویم؛ تنها خواستیم تصوری (ولو ناقص) از آن‌ها داشته باشید. در این فصل، تنها به رابطه یا بستگی بین دو متغیر کار داریم و این که، چگونه می‌توان این بستگی

را به شیوه‌های مختلف نشان داد. چند مثال دربارهٔ نمودار بیاوریم.

۲. مثال ۱. به احتمال زیاد متوجه شده‌اید که در بیمارستان‌ها، در کنار تخت هر بیمار، صفحه‌ای شطرنجی وجود دارد که، روی آن، میزان درجهٔ حرارت بدن بیمار را در ساعت‌های مختلف یادداشت می‌کنند و، با پیوستن نقطه‌هایی که به دست می‌آید، یک منحنی به دست می‌آورند. این منحنی می‌تواند نوسان‌های تب بیمار را نشان دهد که، به یاری آن، پزشک نتیجه‌های لازم را، دربارهٔ حال بیمار خود به دست می‌آورد. این منحنی را، **نمودار تب بیمار** گویند.

در این‌جا، ابتدا، بخشی از جدول معرف تب بیماری را آورده‌ایم و، سپس، نمودار آن را رسم کرده‌ایم (شکل ۳۳).

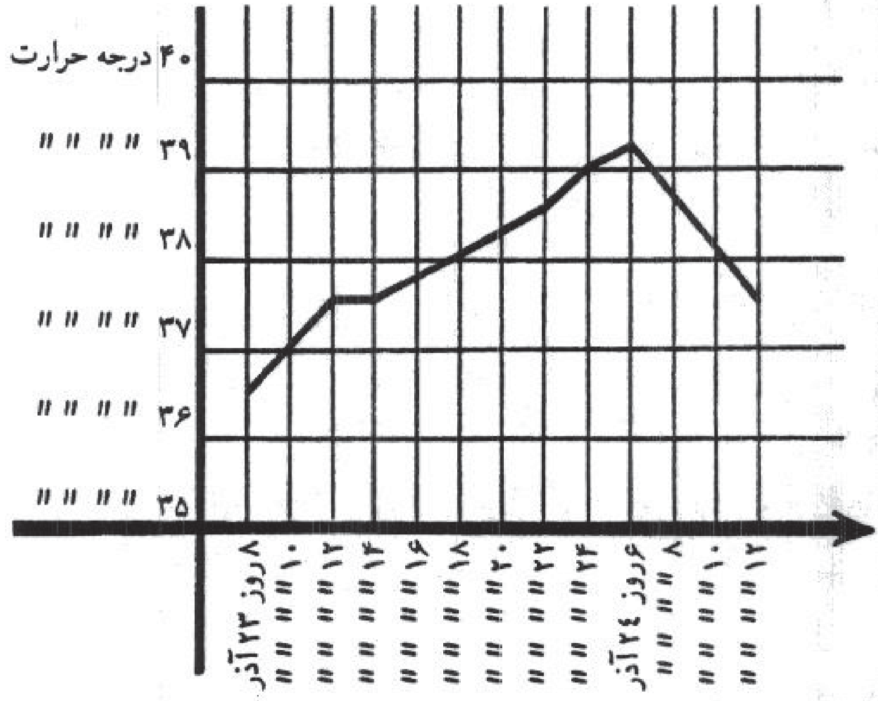
در واقع، نمودار را روی یک دستگاه از محورهای مختصات رسم کرده‌ایم: محور $x'x$، معرف زمان و محور $y'y$ معرف درجهٔ تب بیمار است. به یاری این نمودار، روشن می‌شود که، از ساعت ۸ صبح روز بیست و سوم آذر تب بیمار، ساعت به ساعت بالا رفته و در ساعت ۶ صبح روز بیست و چهارم آذر، به اوج خود رسیده و، از آن به بعد، رو به کاهش گذاشته است. به جز این، به یاری این نمودار، می‌توان میزان تقریبی تب را در ساعت‌هایی هم که در جدول ثبت نشده است، حدس زد: در ساعت ۹ و ۳۰ دقیقه صبح بیست و سوم آذر، درجهٔ حرارت بیمار، به تقریب طبیعی (۳۷ درجه) بوده، ولی در ساعت ۷ روز ۲۴ آذر، ۲ درجه تب داشته است.

مثال ۲. تیر آهنی به طول ۵ متر را، به دیوار تکه داده‌ایم (شکل ۳۴). روشن است که، اگر از فاصلهٔ OA (فاصلهٔ پای تیر تا دیوار) آگاه باشیم، می‌توانیم فاصله OB (فاصلهٔ انتهای دیگر تیر تا زمین) را پیدا کنیم. اگر داشته باشیم $|OA| = ۳$، آن وقت (شکل ۳۴):

$$|OB| = \sqrt{|AB|^۲ - |OA|^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴$$

لحظه‌اندازه‌گیری تب	۲۳ آذر ساعت ۸ صبح	ساعت ۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	
درجه حرارت	۳۶/۵°	۳۷/۲°	۳۷/۵°	۳۷/۶°	۳۷/۸°	۳۸°	

۲۰	۲۲	۲۴	۲۴آذر ساعت ۶	۸	۱۰	۱۲	...
۳۸/۳°	۳۸/۶°	۳۹°	۳۹/۲°	۳۸/۸°	۳۸/۱°	۳۷/۶°	...



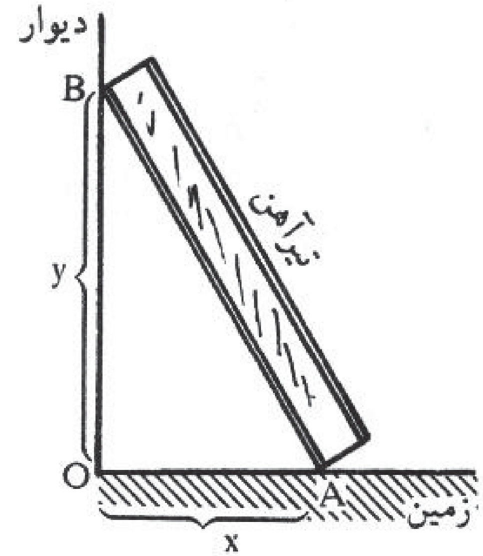
شکل ۳۳. بخشی از جدول و نمودار تب یک بیمار

اگر طول پاره‌خط‌های راست OA و OB را، به ترتیب x و y بنامیم، هم x و هم y (که البته، هیچ کدام مقداری منفی نیست)، کمیت‌های متغیرند، ولی این دو کمیت متغیر به هم بستگی دارند:

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵ \quad (۱)$$

در ضمن، چه x و چه y، نمی‌توانند از ۰ کمتر و از ۵ بیشتر باشند، بنابراین بهتر است، بستگی بین x و y را، این طور بنویسیم:

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵, ۰ \leq x \leq ۵; ۰ \leq y \leq ۵$$



شکل ۳۴

به یاری برابری (۱)، می‌توان هر مقدار دلخواه (از ۰ تا ۵) برای x در نظر گرفت و، سپس، مقدار y متناظر آن را به دست آورد. جدول برخی از این مقدارها و، سپس، نموداری که به یاری آن به دست می‌آید، در این‌جا داده شده است (شکل ۳۵).

با اندکی دقت روشن می‌شود که منحنی AF، کمانِ یک چهارم دایره‌ای است که در ربع اول دستگاه محورهای مختصات واقع است؛ مرکز آن نقطهٔ O (مبداء مختصات) طول شعاع آن برابر ۵ است.

مثال ۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\widehat{C} = ۹۰^\circ)$، فرض می‌کنیم:

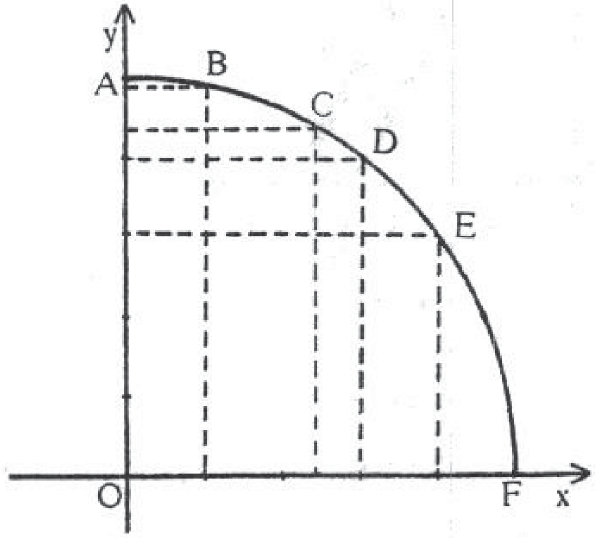
$$\mathrm{tg}\widehat{ABC} = a, |BC| = x$$

اگر مساحت مثلث را (شکل ۳۶) با y نشان دهیم، خواهیم داشت:

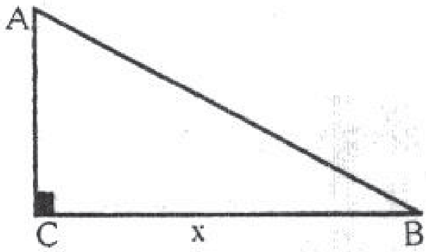
$$y = \frac{۱}{۲}ax^۲$$

اگر جسمی را از یک بلندی (مثلاً از بالای یک برج) به سوی زمین رها کنیم، و اگر مقدار a را به تقریب برابر ۹/۸ (که به نام شتاب ناشی از جاذبهٔ

	A	B	C	D	E	F
x	۰	۱	$\frac{۵}{۲}$	۳	۴	۵
y	۵	$۲\sqrt{۶}$	$\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$	۴	۳	۰



شکل ۳۵



شکل ۳۶

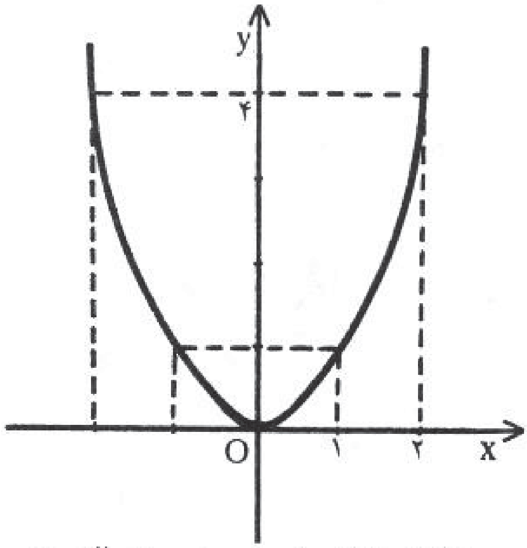
زمین معروف است) بگیریم، بعد از x ثانیه، فاصله‌ای را که جسم می‌پیماید (y)، با این برابری می‌توان پیدا کرد:

$$y = \frac{۱}{۲}ax^{۲}$$

اگر مقاومت یک سیم را برابر a و شدت جریان برقی را که از آن عبور می‌کند برابر x فرض کنیم، آن وقت، مقدار حرارتی که در نتیجهٔ عبور برق حاصل می‌شود و آن را y نامیده‌ایم، از این برابری به دست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۲}ax^{۲}$$

x	...	۲-	۱-	۰	۱	۲	...
$y=x^۲$	...	۴	۱	۰	۱	۴	...



شکل ۳۷. جدول و نمودار $y=x^۲$

از این نمونه مثال‌ها، باز هم می‌توان از دانش‌های مختلف آورد که، همه جا، به رابطه‌ای بین دو متغیر x و y، به صورت $y=\frac{۱}{۲}ax^۲$ برخورد می‌کنیم. بنابراین بررسی این بستگی، به یاری نمودار، اهمیت جدی پیدا می‌کند. به عنوان نمونه، به ازای $a=۲$، آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این‌جا، جدول مقدارهای x و y و نمودار $y=x^۲$ (برای هر مقدار حقیقی x) داده شده است. (شکل ۳۷).

مثال ۴. *جدول و نمودار تغییر* $y=-۲x^۲+۳x+۲$ *را رسم کنید.*

با توجه به سه مثال پیش، متوجه شدیم که، منظور از رسم نمودار

$$y=-۲x^۲+۳x+۲ \qquad (۱)$$

پیدا کردن یک منحنی، در دستگاه محورهای مختصات است که دارای دو ویژگی باشد:

۱) مختصات هر نقطهٔ آن، در برابری (۱) صدق کند؛

۲) مختصات هر نقطهٔ واقع در بیرون این منحنی، در برابری (۱) صدق نکند. بنابراین، برای رسم تقریبی این نمودار (و یا هر نمودار دیگر)، باید نقطه‌هایی از آن را پیدا و، سپس، به هم وصل کرد. بهتر است، برای انتخاب این نقطه‌ها، چند نکته را رعایت کنیم:

اول. اگر نمودار، با محورهای مختصات، برخورد دارد، مختصات این نقطه‌ها را به دست آوریم؛

دوم. اگر مقدار y، حداکثر یا حداقل دارد، آن را محاسبه کنیم و ببینیم به ازای کدام مقدار x به دست می‌آید؛

سوم. چند نقطهٔ اضافی نمودار را مشخص کنیم.

البته، باید توجه داشت که، با در دست داشتن هر برابری که x و y را به هم بستگی می‌دهد، نمی‌توانیم نمودار را رسم کنیم، ولی در حالت‌های ساده (به ویژه در حالت‌هایی که x و y از درجهٔ اول یا y از درجهٔ اول و x از درجه دوم باشد)، با رعایت این سه نکته، می‌توان به تقریب خوبی از نمودار رسید.

اکنون به نمودار مربوط به برابری (۱) می‌پردازیم.

اول. این نمودار، محور $y'y$ را در نقطهٔ به عرض ۲ قطع می‌کند، زیرا مختصات نقطهٔ $(۰, ۲)$ در برابری (۱) صدق می‌کند.

آیا نمودار، محور $x'x$ را قطع می‌کند؟ هر نقطه از محور $x'x$، عرضی برابر صفر دارد. اگر در (۱)، مقدار y را برابر صفر بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$-۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$$

برای حل چنین معادله‌ای (که به آن، **معادلهٔ درجه دوم** گویند)، همیشه می‌توان به این ترتیب، عمل کرد:

الف) مقدار ثابت را به سمت راست برابری می‌بریم و، سپس، دو طرف برابری را بر ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم (تا ضریب آن، برابر واحد شود):

$$x^{۲} - \frac{۳}{۲}x = ۱ \qquad (۲)$$

ب) ببینیم، دو جمله‌ای سمت چپ برابری، چه جمله‌ای کم دارد تا به صورت مجذور یک دو جمله‌ای درآید. $x^۲$ مجذور کامل است، یعنی جملهٔ اول دو جمله‌ای، برابر x است. جملهٔ دوم آن باید چنان باشد که دو برابر حاصل ضرب x در آن، برابر $-\frac{۳}{۲}$ شود، یعنی جملهٔ دوم برابر است با $-\frac{۳}{۴}$، که مجذور آن بر $\frac{۹}{۱۶}$ است. به دو طرف برابری (۲)، عدد $\frac{۹}{۱۶}$ را می‌افزاییم:

$$x^{۲} - \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۱۶} = ۱ + \frac{۹}{۱۶}$$

و یا

$$\left(x - \frac{۳}{۴}\right)^{۲} = \frac{۲۵}{۱۶} \qquad (۳)$$

ج) از دو طرف برابری جذر می‌گیریم:

$$x - \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۴} \text{ و } x - \frac{۳}{۴} = -\frac{۵}{۴}$$

که از آن‌جا، دو جواب، برای x، به دست می‌آید:

$$x = ۲ \text{ و } x = -\frac{۱}{۲}$$

یعنی، اگر در برابری (۱)، مقدار x را برابر ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$ بگیریم، برای y، مقدار ۰ به دست می‌آید. پس دو نقطهٔ دیگر از نمودار (که روی محور $x'x$

قرار دارند) پیدا می‌شود:

$$(۲, ۰) \text{ و } \left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$$

دوّم. y، کمترین مقدار ندارد. وقتی قدر مطلق x را بزرگ کنیم، مقدار y، به سرعت، کوچک می‌شود. برای y نمی‌توان حداقل مقدار ممکن را پیدا کرد.

ولی y، دارای بیشترین مقدار است و می‌توان آن را پیدا کرد. درست شبیه حالتی که می‌خواستیم معادلهٔ درجه دوم را حل کنیم، عمل می‌کنیم، با این تفاوت که در این‌جا، به جای این که دو طرف را بر ضریب $x^۲$ تقسیم کنیم، بین دو جملهٔ اول، از -۲ فاکتور می‌گیریم. ردیف عمل‌ها در زیر، روشن است:

$$y = -۲x^۲ + ۳x + ۲ = -۲\left(x^۲ - \frac{۳}{۲}x\right) + ۲ =$$

$$= -۲\left(x^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۱۶} - \frac{۹}{۱۶}\right) + ۲ =$$

$$= -۲\left[\left(x - \frac{۳}{۴}\right)^۲ - \frac{۹}{۱۶}\right] + ۲ = -۲\left(x - \frac{۳}{۴}\right)^۲ + \frac{۴۱}{۸}$$

روشن است که مقدار y، نمی‌تواند از $\frac{۴۱}{۸}$ بیشتر شود، زیرا اگر $x \neq \frac{۳}{۴}$، آن وقت، مقدار مثبت $۲\left(x - \frac{۳}{۴}\right)^۲$، از $\frac{۴۱}{۸}$ کم می‌شود. حداکثر مقدار y، برابر است با $\frac{۴۱}{۸}$ که به‌ازای $x = \frac{۳}{۴}$ به دست می‌آید. به این ترتیب، نقطهٔ با مختصات

$$\left(\frac{۳}{۴}, \frac{۴۱}{۸}\right)$$

بالاترین نقطه از منحنی نمودار است: این نقطه را، در ریاضیات، **نقطهٔ ماکزیمم** نمودار گویند.

سوم. دو نقطهٔ دیگر از نمودار را پیدا می‌کنیم. بهتر است یکی را قبل از نقطهٔ ماکزیمم و دیگری را بعد از آن در نظر بگیریم. طول نقطهٔ ماکزیمم برابر $\frac{۳}{۴}$ است، $x = -۱$ را قبل از آن و $x = ۳$ را بعد از آن در نظر می‌گیریم. این دو نقطه به دست می‌آید:

$$(-۱, -۳) \text{ و } (۳, -۷)$$

نقطه‌هایی را که به دست آورده‌ایم، در جدولی منظم می‌کنیم، به نحوی که مقدارهای x، به طور صعودی (یعنی از کم به زیاد) قرار گیرند و، سپس، نقطه‌ها را روی دستگاه محورهای مختصات، مشخص و، به ترتیب، به هم وصل می‌کنیم، نمودار تقریبی $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$ به دست می‌آید (شکل ۳۸).

*مثال ۵. *جدول و نمودار تغییر* $y = (x - ۳)\sqrt{x}$ *را رسم کنید.*

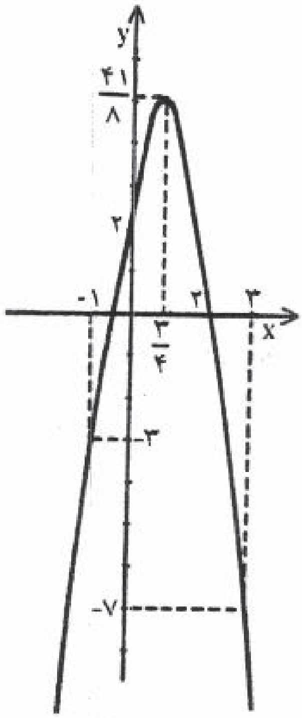
در آغاز باید توجه کنیم که، مقدار x، نمی‌تواند منفی باشد: برای $x < ۰$، مقدار $\sqrt{x}$، عددی موهومی می‌شود.

به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۳$ به دست می‌آید $y = ۰$؛ نمودار از مبداء مختصات آغاز می‌شود و، بعد از مدتی، در نقطهٔ به طول ۳، محور $x'x$ را قطع می‌کند.

مقدارهای $x = \frac{۱}{۴}$، $x = ۱$، $x = ۲$ و $x = ۴$ را انتخاب می‌کنیم (شکل ۳۹)

نقطهٔ $A(۱, -۲)$ را، پایین‌ترین نقطهٔ نمودار (یعنی **می‌نیمم** آن) گرفته‌ایم. آیا اشتباه نکرده‌ایم؟ آیا هر عددی به جای x بگذاریم، برای y، عددی بزرگتر از -۲ به دست می‌آید؟ اگر بخواهیم به درستی نمودار خود مطمئن شویم، باید به این پرسش، پاسخ بدهیم.

	A	B	C	D	E	F
x	۱-	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۴}$	۲	۳
y	۳-	۰	۲	$\frac{۴۱}{۸}$	۰	۷-



شکل ۳۸. جدول و نمودار $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$

برای رسیدن به این هدف، باید ثابت کنیم، مقدار

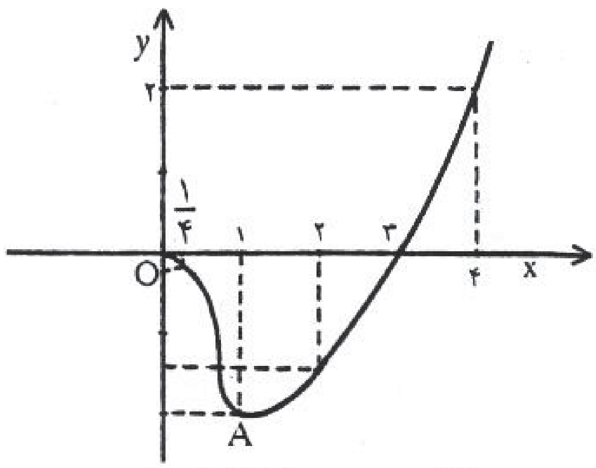
$$(x - ۳)\sqrt{x} \qquad (۱)$$

برای همهٔ مقدارهای غیر منفی x، به جز $x = ۱$، از -۲ بزرگتر است.

به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۳$، مقدار (۱)، برابر صفر می‌شود که از عدد منفی ۲−، بزرگتر است.

در حالت $x > ۳$ هم، مقدار (۱)، عددی مثبت می‌شود که، به طور طبیعی، از عدد منفی -۲ بزرگتر است.

x	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	۲	۳	۴	...
y	۰	$-\frac{۱۱}{۸}$	-۲	$-\sqrt{۲}$	۰	۲	...



شکل ۳۹. نمودار $y=(x-۳)\sqrt{x}$

این می‌ماند که ثابت کنیم، برای $۰ < x < ۳$، مقدار (۱)، از -۲ بزرگتر است:

$$(x \neq ۱ \text{ و } ۰ < x < ۳) \Rightarrow (x-۳)\sqrt{x} > -۲$$

یعنی باید ثابت کنیم، قدر مطلق مقدار $(۳-x)\sqrt{x}$، از ۲ کوچکتر است (البته، به شرطی که x، عددی بین صفر و ۳ باشد:

$$|x-۳|\sqrt{x} < ۲$$

وقتی دو طرف نابرابری، عددهای مثبت باشند، می‌توان دو طرف نِابرابری را، مجذور کرد:

$$(x-۳)^{۲}x < ۴$$

که اگر عمل‌های لازم را انجام دهیم، چنین می‌شود:

$$x^{۳} - ۶x^{۲} + ۹x - ۴ < ۰$$

که عبارت سمت چپ آن را، می‌توان چنین نوشت:

$$(x^۳ - ۴x^۲) + (-۲x^۲ + ۸x) + (x - ۴) =$$
$$= x^۲(x - ۴) - ۲x(x - ۴) + (x - ۴) =$$
$$= (x - ۴)(x^۲ - ۲x + ۱) = (x - ۴)(x - ۱)^۲$$

بنابر شرط x از ۳، و به طور بدیهی از ۴ کوچکتر است، پس $x - ۴ < ۰$. مقدار $(۱ - x)^۲$، به شرط $x \neq ۱$، همیشه مثبت است، پس

$$(x - ۴)(x - ۱)^۲ < ۰$$

نقطهٔ $A(۱, -۲)$، به واقع، پایین‌ترین نقطهٔ نمودار، یعنی نقطهٔ می‌نیمم آن است.

۲§. خط راست در صفحهٔ محورهای مختصات

۱. نمودار معادلهٔ درجهٔ اول دومجهولی. معادلهٔ درجه اوّل دومجهولی

$$ax + by + c = ۰ \qquad (۲)$$

را در نظر می‌گیریم. روشن است که، در معادلهٔ (۱)، عددهای a و b نمی‌توانند با هم برابر صفر شوند، زیرا در این صورت، به برابری $c = ۰$ می‌رسیم که معادله نیست.

یادداشت. در ریاضیات، وقتی بخواهند شرط کنند که عددهای a و b، با هم برابر صفر نیستند، می‌نویسند:

$$a^۲ + b^۲ \neq ۰$$

و روشن است که، در این برابری، هر یک از عددهای a یا b می‌تواند برابر صفر باشد، ولی هر دوی آن‌ها، به طور هم‌زمان، نمی‌توانند برابر صفر باشند.

همچنین اگر در جایی با شرط

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \neq ۰$$

روبه‌رو شدیم، به معنای آن است که، سه عدد x و y و z، با هم برابر صفر نیستند.

شرط $a^۲ + b^۲ = ۰$، به‌معنای $a = b = ۰$ وشرط $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ به معنای $x = y = z = ۰$ است.

به معادلهٔ (۱) برگردیم و حالت‌های مختلف آن را بررسی کنیم.

۱) $a = c = ۰$ و $b \neq ۰$. در این حالت، معادلهٔ (۱) به صورت

$$by = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

درمی‌آید. چه نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات، عرضی برابر صفر دارند؟ روشن است که نقطه‌های واقع بر محور $x'x$، و تنها همین نقطه‌ها. بنابراین، خط راستی که از محور $x'x$ می‌گذرد، نمودار معادلهٔ $y = ۰$ است، زیرا هر نقطهٔ واقع بر $x'x$، عرضی برابر صفر دارد و، در بیرون این محور، نمی‌توان نقطه‌ای با عرض برابر صفر پیدا کرد:

خط راستی که از محور $x'x$ می‌گذرد یا $y = ۰$

۲) $b = c = ۰$ و $a \neq ۰$. در این حالت، به معادلهٔ

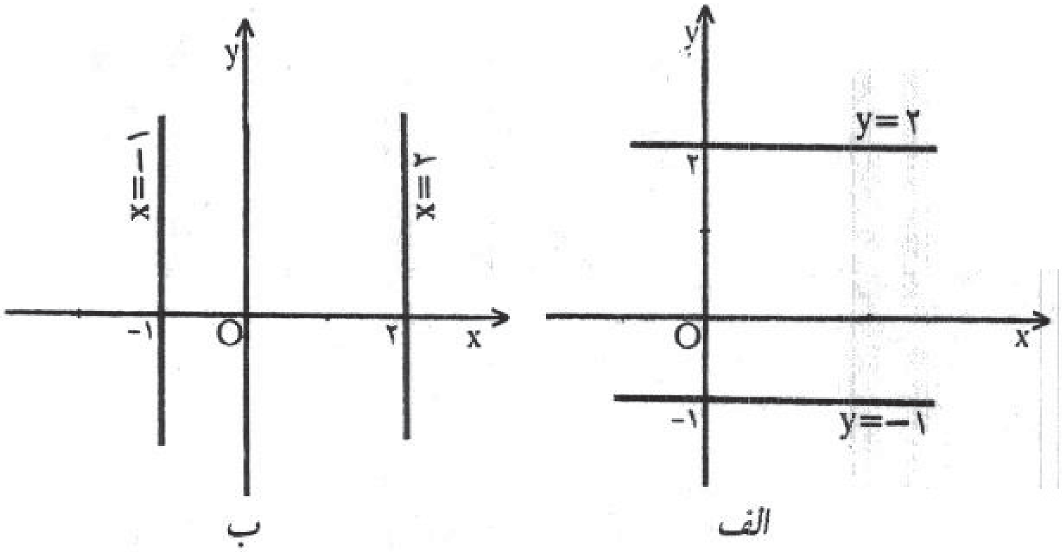
$$ax = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

می‌رسیم که معرف محور $y'y$ است (توضیح، شبیه حالت قبل):

خط راستی که از محور $y'y$ می‌گذرد و یا $x = ۰$

۳) $a = ۰$، $b \neq ۰$ و $c \neq ۰$. در این حالت، به دست می‌آید:

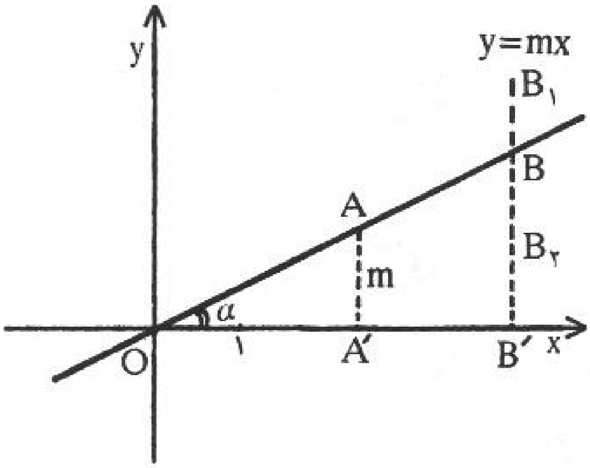
$$by + c = ۰ \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$



شکل ۴۰

اگر، برای سادگی کار، فرض کنیم $p = -\frac{c}{b}$ (p عددی است حقیقی، مثبت یا منفی)، به معادلهٔ $y = p$ می‌رسیم. به این ترتیب، باید به سراغ نقطه‌هایی در صفحهٔ محورهای مختصات برویم که، عرض آن‌ها، برابر p باشد (در معادلهٔ $y = p$، هیچ شرطی برای x وجود ندارد و، بنابراین، طول این نقطه‌ها می‌تواند هر عدد دلخواه باشد). این نقطه‌ها روی خط راستی موازی محور $x'x$ و به فاصله‌های برابر $|p|$ از آن قرار دارند: برای $p > 0$ در بالا و برای $p < 0$ در پایین محور $x'x$. در ضمن، هر نقطه‌ای که روی این خط راست نباشد، عرضی غیر از p دارد. به این ترتیب، *معادلهٔ خط راست موازی محور* $x'x$، *به صورت* $y = p$ *است و برعکس*. روی شکل ۴۰ـالف، خط‌های راست $y = 2$ و $y = -1$ رسم شده‌اند.

۴) $b = 0$، $a \neq 0$ و $c \neq 0$. دراین‌حالت، معادلهٔ $ax + by + c = 0$ به صورت $x = -\frac{c}{a}$ و یا (اگر $q = -\frac{c}{a}$ بگیریم) به صورت $x = q$ درمی‌آید که معادلهٔ خط راستی است موازی محور $y'y$ (استدلال شبیه حالت قبل است). *هر خط راست موازی محور* $y'y$، *معادله‌ای به صورت* $x = q$ *دارد و برعکس*. در شکل ۴۰ـب، خط‌های راست $x = 2$ و $x = -1$



شکل ۴۱

رسم شده‌اند.

۵) $c=\circ$، $a\neq\circ$ و $b\neq\circ$. در این حالت، معادلهٔ (۱) به صورت

$$ax+by=\circ \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x$$

درمی‌آید که، اگر فرض کنیم $-\frac{a}{b}=m$، چنین خواهد شد:

$$y=mx$$

نقطه‌های $(\circ,\circ)$ و $(1,m)$ روی نمودار این معادله‌اند. این دو نقطه را O و A می‌نامیم و آن‌ها را، در صفحهٔ محورهای مختصات به هم وصل می‌کنیم و، از دو طرف، امتداد می‌دهیم. ثابت می‌کنیم، خط راستی که از دو نقطهٔ O و A می‌گذرد، نمودار $y=mx$ است (شکل ۴۱). نقطهٔ دلخواه B را روی این خط راست انتخاب می‌کنیم و مختصات آن را (x,y) می‌نامیم. با توجه به شکل ۴۱ و با توجه به موازی بودن پاره‌خط‌های راست AA' و BB'، داریم:

$$\frac{|BB'|}{|OB'|}=\frac{|AA'|}{|OA'|}\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{m}{1}\Rightarrow y=mx$$

پس، مختصات هر نقطه از خط راست OA، در معادلهٔ $y=mx$ صدق می‌کند.

اکنون نقطه‌ای در بیرون این خط راست در نظر می‌گیریم (مثل B_1 یا B_2). با توجه به شکل روشن است که

$$y_{B_1} > mx \text{ و } y_{B_2} < mx$$

یعنی مختصات هر نقطه‌ای که در بیرون خط راست OA باشد، در معادلهٔ $y = mx$ صدق نمی‌کند و، به این ترتیب، خط راست OA، نمودار این معادله است.

به همان شکل ۴۱ برمی‌گردیم و زاویهٔ بین جهت مثبت محور $x'x$ با نیم خط راست OA را (که در بالای محور $x'x$ قرار دارد) α می‌نامیم. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAA' به دست می‌آید:

$$\text{tg}\alpha = m$$

خط راست $y = mx$، با جهت مثبت محور $x'x$ زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر m است. m را **ضریب زاویه** یا **شیب** خط راست $y = mx$ گویند.

ضریب زاویهٔ خط راست $y - 2x = 0$ برابر ۲ و ضریب زاویهٔ خط راست $2y - x = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ است، زیرا می‌توان آن‌ها را، این طور نوشت:

$$y = 2x \text{ و } y = \frac{1}{2}x$$

همچنین روشن می‌شود که خط راست $y = x$، نیمساز ربع‌های اول و سوم، و خط راست $y = -x$، نیمساز ربع‌های دوم و چهارم، در صفحهٔ محورهای مختصات‌اند.

مثال ۶. *خط راستی از مبداء مختصات و نقطهٔ $A(2,5)$ گذشته است. معادلهٔ این خط راست را پیدا کنید.*

اگر دو نقطهٔ O و A را در نظر بگیریم، با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ای که به دست می‌آید، مقدار $m = \frac{۵}{۲}$ (ضریب زاویهٔ خط راست) به دست می‌آید. معادلهٔ خط راست مورد نظر چنین است:

$$y = \frac{۵}{۲}x \Rightarrow ۵x - ۲y = ۰$$

۶) هیچ کدام از عددهای a، b و c، برابر صفر نیستند. در این حالت داریم:

$$ax + by + c = ۰ \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

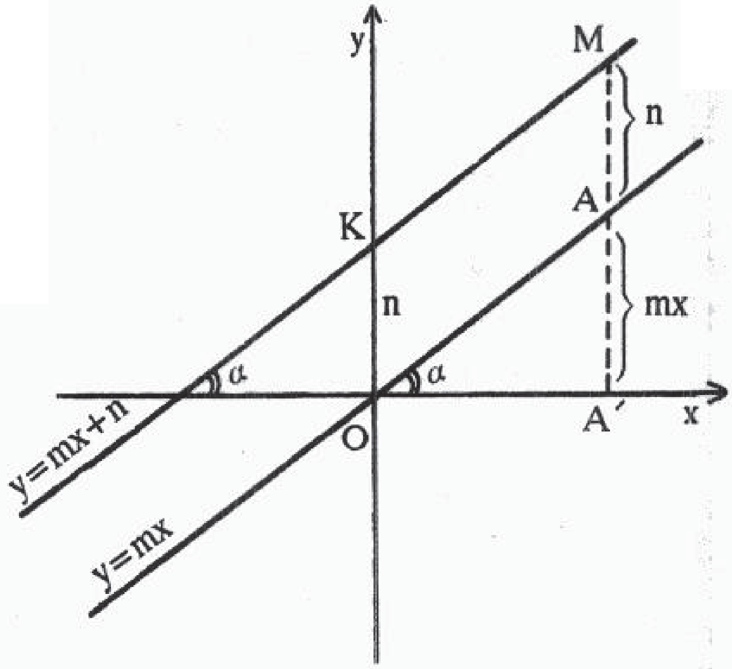
$m = -\frac{a}{b}$ و $n = -\frac{c}{b}$ می‌گیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$y = mx + n$$

خط راست $y = mx$ را، که از مبداء مختصات می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای برابر m دارد، رسم می‌کنیم (شکل ۴۲). روی محور $y'y$ و از نقطهٔ O، به اندازهٔ n جدا می‌کنیم: $K(۰, n)$ (روشن است که، برای $n > ۰$، نقطه‌ای در بالای $x'x$ و برای $n < ۰$، نقطه‌ای در پایین آن به دست می‌آید). اکنون، اگر از نقطهٔ K، خط راستی موازی خط راست $y = mx$ رسم کنیم، نمودار $y = mx + n$ به دست می‌آید (شکل ۴۲ به شما کمک می‌کند ثابت کنید: مختصات هر نقطه از این خط راست، در معادلهٔ $y = mx + n$ صدق می‌کند و مختصات هر نقطهٔ واقع در بیرون آن، در این معادله صدق نمی‌کند).

در این جا هم، m را ضریب زاویهٔ خط راست گویند، زیرا دو خط راست موازی، با محور $x'x$ زاویه‌های برابر می‌سازند.

مثال ۷. *دو نقطهٔ $A(۱, -۱)$ و $B(-۳, ۲)$ داده شده‌اند. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد.*



شکل ۴۲

معادلهٔ خط راست AB باید به صورت $y = mx + n$ باشد؛ وقتی این معادله مشخص می‌شود که بتوانیم مقدارهای m و n را معین کنیم. باید مختصات نقطه‌های A و B، در معادلهٔ $y = mx + n$ صدق کنند. به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} -۱ = m + n \\ ۲ = -۳m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۳}{۴} \\ n = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

بنابراین، معادلهٔ خط راست AB چنین است:

$$y = -\frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳x + ۴y + ۱ = ۰$$

مثال ۸. مختصات نقطه‌های برخورد خط راست

$$۲x + ۵y = ۱۰$$

را با هر یک از محورهای مختصات پیدا کنید.

نقطه‌ای از خط راست، روی محور $y'y$ است که طولی برابر صفر داشته باشد. بنابراین، با قرار دادن $x = ۰$ در معادلهٔ خط راست، عرض نقطه‌ای به دست می‌آید که هم روی محور $y'y$ است و هم، مختصات آن، در معادلهٔ خط راست صدق می‌کند (یعنی، در محل برخورد خط راست با محور $y'y$ است):

$$\begin{cases} ۲x + ۵y = ۱۰ \\ x = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۲ \end{cases}$$

عدد ۲ ، *یعنی عرض نقطه‌ای از خط راست را، که روی $y'y$ قرار دارد،* **عرض از مبداء** *خط راست گویند.*

به همین ترتیب، با قرار دادن $y = ۰$ در معادلهٔ خط راست، **طول از مبداء**خط راست، *یعنی طول نقطه‌ای از خط راست که روی محور $x'x$ قرار دارد،* به دست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} ۲x + ۵y = ۱۰ \\ y = ۰ \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۵ \\ y = ۰ \end{array} \right.$$

نقطه‌های $A(۰, ۲)$ و $B(۵, ۰)$، نقطه‌های برخورد خط راست مفروض با محورهای مختصات است.

یادداشت. برای رسم یک خط راست، کافی است دو نقطه از آن را در اختیار داشته باشیم. در اغلب حالت‌ها، با در دست داشتن معادله یک خط راست، بهتر است طول از مبداء و عرض از مبداء خط راست را (یعنی نقطه‌های برخورد آن را با محورهای مختصات) پیدا کنیم و، سپس، خط راست را، از دو نقطه‌ای که به دست می‌آید بگذرانیم. البته، اگر طول و عرض از مبداء، عددهای خوبی نباشند (مثلاً عددهای کسری از نوع $\frac{۱۲}{۱۳}$ یا $-\frac{۲۵}{۷}$) بهتر آن است، به‌سراغ نقطه‌های دیگری با عددهای مناسب‌تری

برای x و y برویم. درضمن، اگر $p \neq ۰$ را طول از مبداء و $q \neq ۰$ را عرض از مبداء یک خط راست فرض کنیم، معادلهٔ این خط راست، چنین می‌شود:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$$

مثال ۹. *ثابت کنید، خط راست به معادلهٔ*

$$(۲m + ۱)x - (m - ۱)y + ۷m - ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

به ازای هر مقدار حقیقی m، همیشه از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد. مختصات این نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

توضیح مساله. وقتی عددی به جای m (که آن را **پارامتر** معادله گویند) قرار دهید، معادله‌ای به دست می‌آید که معرف یک خط راست است. اگر عددهای مختلفی به جای پارامتر m قرار دهیم، خط‌های راست مختلفی به دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ (۱)، نمایندهٔ بی‌نهایت خط راست است؛ ولی مساله مدعی است که، همهٔ این خط‌های راست، از یک نقطهٔ ثابت (که باید مختصات آن را پیدا کنیم) می‌گذرند.

راه حل اول. n را عددی دلخواه، غیر از m می‌گیریم ($m \neq n$). اگر به جای m، عدد n را در معادله قرار دهیم، چون n غیر از m است، خط راست دیگری به دست می‌آید و، به طور طبیعی، باید نقطهٔ برخورد آن‌ها، مختصاتی بر حسب m و n داشته باشد. ولی اگر به واقع، همهٔ این خط‌های راست، از نقطهٔ ثابتی بگذرند، باید مختصات نقطهٔ برخورد آن‌ها، نه به m بستگی داشته باشد، نه به n. این مختصات باید مختصات همان نقطهٔ ثابت (که مساله، مدعی آن است) باشد. به این ترتیب، معادله‌های دو خط راست را در اختیار داریم:

$$\begin{cases} (۲m + ۱)x - (m - ۱)y + ۷m - ۱ = ۰ \\ (۲n + ۱)x - (n - ۱)y + ۷n - ۱ = ۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

چگونه مختصات نقطهٔ برخورد این دو خط راست را پیدا کنیم! این نقطهٔ برخورد را A می‌نامیم و، مختصات آن را، (x, y) می‌گیریم. نقطهٔ A روی هر دو خط راست است، پس باید مختصات آن، در هر دو معادلهٔ دستگاه (۲) صدق کند و، چنین عددهایی برای x و y، همان جواب دستگاه (۲) است.

در دستگاه (۲)، دو طرف معادلهٔ اول را در $(۱ - n)$ و دو طرف معادلهٔ دوم را، در $-(۱ - m)$ ضرب و سپس، دو معادله را با هم جمع می‌کنیم؛ بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$-۳(m-n)x - ۶(m-n) = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

$x = -۲$ را در یکی از دو معادله از دستگاه (۲)، و مثلاً در معادلهٔ اولِ آن، به جای x می‌گذاریم، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$۳(m-۱) - (m-۱)y = ۰ \Rightarrow y = ۳$$

به این ترتیب، برای مختصات نقطهٔ A، دو عدد به دست آمد:

$$x = -۲, y = ۳; A(-۲, ۳)$$

یعنی مختصات نقطهٔ برخورد دو خط راست دستگاه (۲)، به m و n بستگی ندارد و، برای عددهای دلخواه m و n، همین نقطه به دست می‌آید: خط راست (۱)، *به ازای هر مقدار حقیقی m، از نقطهٔ $A(-۲, ۳)$ می‌گذرد.*

راه حلِ دوم. راه حل اول را می‌توان اندکی ساده‌تر کرد. اگر مثلاً به جای m، عدد ۱ را بگذاریم، یکی از بی نهایت خط راست (۱) به دست می‌آید:

$$m = ۱; \quad ۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

خط راست $x = -۲$ (خط راستی که موازی با محور $y'y$ است)، باید از نقطهٔ ثابت A (اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد) بگذرد؛ یعنی با قرار

دادن $x = -۲$ در معادلهٔ (۱)، باید برای y، عددی ثابت (همان عرض نقطهٔ A) به دست آید. در راه حل اول دیدیم که، به ازای $x = -۲$، برای y، عدد ۳ (عدد ثابتی که به m بستگی ندارد) به دست می‌آید: $A(-۲,۳)$.

راه حل سوّم. در راه حل دوم، یکی از خط‌های راست (۱) را پیدا کردیم و آن را، با معادلهٔ (۱)، به عنوان یک دستگاه در نظر گرفتیم. اکنون، باز هم کار را ساده‌تر می‌کنیم و دو عدد دلخواه به جای m می‌گذاریم تا دو خط، از خط‌های راست (۱) را در اختیار داشته باشیم: $m = ۱$ و $m = -\frac{۱}{۲}$ (بی‌تردید، توجه کرده‌اید که این دو عدد، یکی ضریب y را صفر می‌کند و دیگری ضریب x را؛ به این ترتیب، ساده‌ترین خط‌های راست، از بین خط‌های راست (۱) به دست می‌آید). با قرار دادن این دو عدد به جای m، دو خط راست $x = -۲$ و $y = ۳$ (اولی موازی $y'y$ و دومی موازی $x'x$) به دست می‌آید که، نقطهٔ برخورد آن‌ها، همان $A(-۲,۳)$ است.

ولی توجه کنید، با این روش، هنوز ثابت نکرده‌ایم که، نقطهٔ A، روی همهٔ خط‌های راست (۱) قرار دارد؛ تنها ثابت کردیم، نقطهٔ، محل برخورد دو خط از خط‌های راست (۱) است. برای این که قانع شویم، نقطهٔ A، روی همهٔ خط‌های راست (۱) واقع است، باید آزمایش کنیم که، مختصات آن، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. نتیجهٔ آزمایش مثبت است: مختصات نقطهٔ A، در معادله (۱) صدق می‌کند.

راه حل چهارم. راه حل‌هایی که تا این‌جا آوردیم، ساده و قانع‌کننده بود. ولی نمی‌توان آن‌ها را، راه حل‌هایی زیبا به حساب آورد. در این راه‌حل‌ها، تنها با مُشتی عمل سرو کار داشتیم، هیچ اندیشه‌ای و هیچ نکتهٔ جالبی از ریاضیات، در آن‌ها دیده نمی‌شود. *راه حلی را، برای یک مسالهٔ ریاضی، زیبا گویند که، با استفاده از کمترین مقدار عمل، ضمن سود جستن از یک اندیشهٔ ریاضی، بتواند مساله را به نتیجه برساند.*

معادلهٔ (۱) را، نسبت به حرف m (نسبت به پارامتر) منظم می‌کنیم، به

این صورت درمی‌آید:

$$(۲x - y + ۷)m + (x + y - ۱) = ۰ \qquad (۳)$$

به صورت مساله دقت کنیم. اگر خط‌های راست (۱)، از یک نقطهٔ ثابت، مثل A، بگذرند، به معنای این است که ما باید x و y را طوری پیدا کنیم که، به ازای هر مقدار دلخواه m، در معادلهٔ (۱) یا معادلهٔ (۳) صدق کنند. x و y باید چنان باشند که، برابری (۳)، به ازای هر مقدار حقیقی m برقرار باشد؛ یعنی *برابری (۳)، باید نسبت به m یک اتحاد باشد.* برابری (۳)، وقتی اتحاد است که، ضریب‌های جمله‌های متشابه (نسبت به m)، در دو طرف برابری، با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} ۲x - y + ۷ = ۰ \\ x + y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

و جواب این دستگاه، مختصات نقطهٔ ثابت A را به ما می‌دهد: $A(-۲, ۳)$.

§۳. چند نتیجه مهم

تا همین‌جا با اساسی‌ترین نکته‌های مقدماتی «هندسهٔ تحلیلی» آشنا شده‌ایم. ولی از آن چه خوانده‌ایم، می‌توان نتیجه‌های بسیار مهمی به دست آورد که، در همه‌جا، برای حل مساله‌ها، به ما یاری برسانند.

نتیجه ۱. هر معادلهٔ درجهٔ اول دو مجهولی به صورت

$$ax + by + c = ۰ \quad (a^۲ + b^۲ \neq ۰) \qquad (۱)$$

را می‌توان، روی صفحه و در دستگاه انتخابی محورهای مختصات، به صورت یک خط راست نشان داد؛ و برعکس، هر خط راستی که در دستگاه محورهای مختصات، روی صفحه رسم شده باشد، معادله‌ای به صورت (۱) دارد. به

همین مناسبت، هر معادله‌ای را که به صورت (۱) باشد، **معادلهٔ خطی** گویند. همچنین، می‌توان گفت، در برابری (۱)، x و y به صورت خطی، به هم بستگی دارند. در حالت کلی، هر معادلهٔ درجه اول را (با هر چند مجهول)، معادلهٔ خطی گویند.

مثال ۱۰. اگر (x, y)، مختصات نقطهٔ متغیری از صفحهٔ محورهای مختصات باشد که، با برابری زیر، به هم بستگی دارند، نمودار آن را رسم کنید:

$$۳x^۲ + y^۲ + ۴xy + ۲y - ۳ = ۰ \qquad (۱)$$

بستگی بین x و y، یک بستگی خطی نیست و، بنابراین، نمودار این بستگی، نمی‌تواند یک خط راست باشد؛ ولی ممکن است، بستگی بین x و y، شامل دو بستگی خطی باشد که باید آن را کشف کرد. اگر عبارت سمت چپ برابری (۱)، قابل تجزیه به صورت ضرب دو عبارت درجه اول باشد، از آن‌جا که، در آن صورت، می‌توان هر یک از دو عامل ضرب را، به طور جداگانه برابر صفر قرار داد، ما را به این نتیجه می‌رساند که، نمودار (۱)، شامل دو خط راست است. ولی اگر ثابت کنیم، برابری (۱) قابل تجزیه به دو عامل درجه اول نیست، به معنای آن خواهد بود که، برابری (۱)، ربطی به بستگی‌های خطی ندارد و، با آگاهی‌های خود، نمی‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. ولی تجزیهٔ عبارت سمت چپ برابری (۱) به صورت ضرب دو عامل، و یا اثبات این که تجزیه شدنی نیست، چندان ساده نیست.

از روشی استفاده می‌کنیم که، ضمن حل مثال ۴، برای حل معادلهٔ درجه دوم، به کار بردیم. این روش، به سادگی روشن می‌کند: آیا عبارت سمت چپ برابری (۱)، تجزیه شدنی است یا نه!

در آغاز، عبارت سمت چپ برابری (۱) را نسبت به مجهول y منظم

می‌کنیم (می‌توانستیم، نسبت به مجهول x، منظم کنیم):

$$y^۲ + ۲(۲x + ۱)y + (۳x^۲ - ۳) = ۰$$

دو جملهٔ اول را می‌توان طوری تکمیل کرد تا به صورت مجذور یک دو جمله‌ای در آید:

$$[y^۲ + ۲(۲x + ۱)y + (۲x + ۱)^۲] - (۲x + ۱)^۲ + (۳x^۲ - ۳) = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$[y + (۲x + ۱)]^۲ - (x + ۲)^۲ = ۰$$

که به سادگی قابل تجزیه است:

$$[y + (۲x + ۱) + (x + ۲)][y + (۲x + ۱) - (x + ۲)] = ۰$$

و یا، پس از ساده کردن:

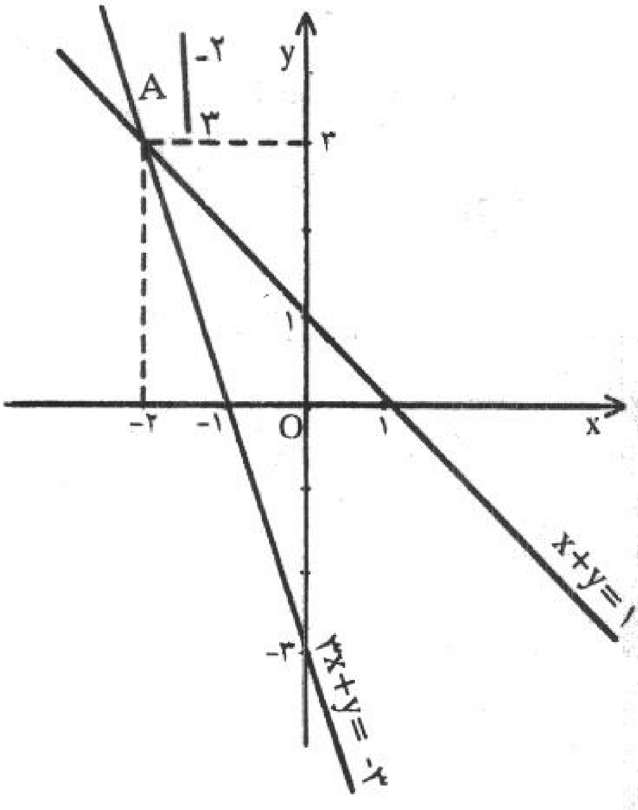
$$(y + ۳x + ۳)(y + x - ۱) = ۰$$

حاصل ضرب دو پرانتز وقتی برابر صفر است که، دست کم، یکی از آن‌ها، برابر صفر باشد:

$$y + ۳x + ۳ = ۰ \text{ یا } y + x - ۱ = ۰$$

که هر دوی آن‌ها، معادله‌ای خطی‌اند.

نمودار معادلهٔ (۱)، در شکل ۴۳ داده است. این نمودار شامل دو خط راست است که در نقطهٔ $A(-۲, ۳)$ به هم رسیده‌اند. ضریب زاویهٔ یکی



شکل ۴۳

از این خط‌های راست، برابر ۱− و ضریب زاویهٔ دیگری برابر ۳− است (چرا؟).

نتیجهٔ ۲. اگر دو نمودار را، در یک دستگاه محورهای مختصات در روی صفحه رسم کرده باشیم، مختصات نقطه یا نقطه‌های برخورد آن‌ها، همان جواب یا جواب‌های دستگاهِ شامل دو معادلهٔ نمودار است.

مثال ۱۱. *جواب‌های دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را، در دستگاه محورهای مختصات نشان دهید:*

$$\begin{cases} x - y - ۱ = ۰ \\ y = x^{۲} - ۲x - ۱ \end{cases}$$

معادلهٔ اول دستگاه، یک معادلهٔ خطی است و، با به دست آوردن طول از مبداء و عرض از مبداء آن، به سادگی قابل رسم است. اگر معادلهٔ دوم

دستگاه را به صورت

$$y = (x - ۱)^۲ - ۲$$

بنویسیم، روشن می‌شود که، کمترین مقدار y، برابر است با ۲−، که به ازای ۱ $= x$ به دست می‌آید. یعنی نقطه (۲− ,۱)، پایین‌ترین نقطه (یا نقطهٔ می‌نیمم) نمودار آن است. این نمودار، در نقطهٔ (۱− ,۰) محور $y'y$ را قطع کرده و، در ضمن، از نقطه‌های

$$(-۱, ۲); (۲, -۱); (۳, ۲)$$

گذشته است. با پیدا کردن این نقطه‌ها، شکل تقریبی نمودار به دست می‌آید.

روی شکل ۴۴، نمودارهای دو معادلهٔ دستگاه داده شده است. این دو نمودار در نقطه‌های $A(۳, ۲)$ و $B(۰, -۱)$ یکدیگر را قطع کرده‌اند. بنابراین، جواب‌های دستگاه مفروض، چنین‌اند:

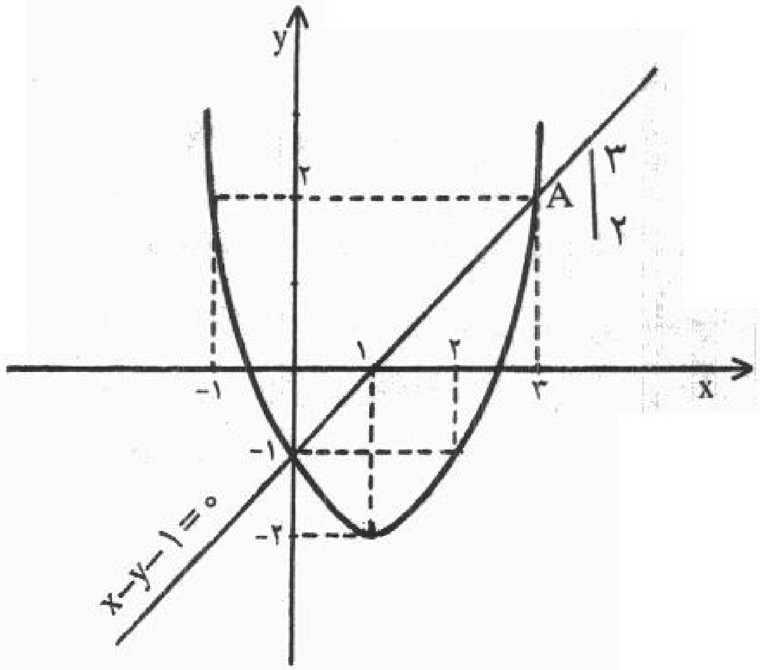
$$\left| \begin{array}{l} x = ۳ \\ y = ۲ \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = -۱ \end{array} \right.$$

نتیجه ۳. *دو خط راست، وقتی با هم موازی‌اند که، ضریب زاویه‌های برابر داشته باشند.*

درستی این مطلب روشن است، زیرا دو خط راست موازی، دو زاویهٔ برابر با جهت مثبت محور $x'x$ می‌سازند و، دو زاویهٔ برابر، تانژانت‌های برابر دارند.

مثال ۱۲. *مقدار a را طوری پیدا کنید که خطهای راست*

$$(a + ۱)x + (۲a - ۱)y = ۵,$$
$$(a - ۴)x - ay = ۲$$



شکل ۴۴

با هم موازی باشند.

معادلهٔ هر دو خط راست را، به صورت $y = mx + n$ در می‌آوریم (در این صورت، m ضریب زاویهٔ آن‌ها خواهد بود):

$$y = -\frac{a+۱}{۲a-۱}x + \frac{۵}{۲a-۱} \text{ ، } a \neq \frac{۱}{۲}$$

$$y = \frac{a-۴}{a}x - \frac{۲}{a} \text{ ، } a \neq ۰$$

ضریب زاویهٔ خط راست اول $-\frac{a+۱}{۲a-۱}$ و ضریب زاویهٔ خط راست دوم $\frac{a-۴}{a}$ است و، برای موازی بودن دو خط راست، باید این ضریب زاویه‌ها با هم برابر باشند:

$$-\frac{a+۱}{۲a-۱} = \frac{a-۴}{a} \Rightarrow ۳a^۲ - ۸a + ۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^۲ - \frac{۸}{۳}a = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \left(a - \frac{۴}{۳}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۹} - \frac{۴}{۳} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{۴}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a - \frac{۴}{۳} = \pm\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $a = ۲$ یا $a = \frac{۲}{۳}$ و، در هر حالت، معادلهٔ خط‌های راست، چنین می‌شوند:

$$a = ۲ \begin{cases} x + y - \frac{۵}{۳} = ۰ \\ x + y + ۱ = ۰ \end{cases}, m = -۱$$

$$a = \frac{۲}{۳} \begin{cases} ۵x + y - ۱۵ = ۰ \\ ۵x + y - ۳ = ۰ \end{cases}, m = -۵$$

در حالت $a = ۲$، دو خط راست با نیمساز ربع‌های دوم و چهارم موازی‌اند و، در حالت دوم، ضریب زاویه‌هایی برابر ۵− دارند.

یادداشت. در واقع، باید دو حالت $a = \frac{۱}{۲}$ و $a = ۰$ را هم آزمایش کنیم (این دو حالت را، ضمن عمل، کنار گذاشته بودیم). در حالت اول، به دو معادلهٔ

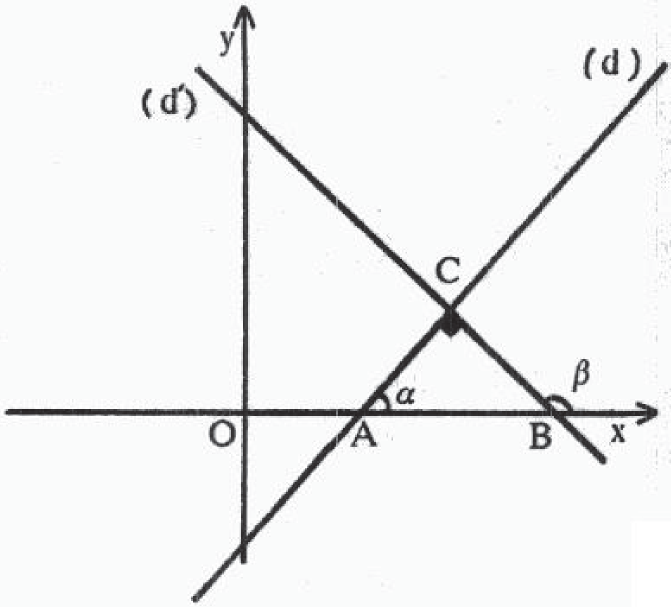
$$\begin{cases} x = \frac{۱۰}{۳} \\ ۷x + y = ۴ \end{cases}$$

و در حالت $a = ۰$، به دو معادلهٔ

$$\begin{cases} x - y = ۰ \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

می‌رسیم که، در هر حال، خط‌های راست ناموازی‌اند.

نتیجهٔ ۴. *حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های دو خط راست عمود برهم، برابر است با ۱−؛ به زبان دیگر، ضریب زاویهٔ هر خط راست، برابر است با عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط راست عمود بر آن.*



شکل ۴۵

دو خط راست d و d' را، عمود بر هم، در صفحهٔ دستگاه محورهای مختصات، در نظر می‌گیریم (شکل ۴۵).

ضریب زاویهٔ خط راست d را برابر m و ضریب زاویهٔ خط راست d' را برابر m' می‌گیریم:

$$m = \text{tg}\alpha, m' = \text{tg}\beta$$

ولی، با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۴۵) داریم:

$$\beta = \frac{\pi}{۲} + \alpha \Rightarrow \text{tg}\beta = -\cot\alpha$$

بنابراین

$$m \cdot m' = \text{tg}\alpha\text{tg}\beta = \text{tg}\alpha(-\cot\alpha) = -۱$$

مثال ۱۳. *از نقطهٔ $M(۱, -۲)$، خط راستی عمود بر خط راست $x + ۲y = ۳$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این عمود را پیدا کنید.*

خط راست $x + ۲y = ۳$، ضریب زاویه‌ای برابر $-\frac{۱}{۲}$ دارد، پس ضریب زاویهٔ خط راست عمود بر آن برابر ۲ می‌شود. یعنی، معادلهٔ خط راستِ عمود، به صورت $y = ۲x + n$ است. این خط راست، از نقطهٔ M می‌گذرد، یعنی مختصات نقطهٔ M در آن صدق می‌کند:

$$-۲ = ۲ + n \Rightarrow n = -۴$$

و معادلهٔ خط راست عمود، چنین می‌شود:

$$y = ۲x - ۴$$

مثال ۱۴. *نقطه‌های* $A(۲, ۲)$، $B(۱, -۱)$ *و* $C\left(-\frac{۱}{۳}, ۰\right)$ *داده شده‌اند. مساحت مثلث* ABC *را پیدا کنید.*

مثلث ABC در شکل ۴۶ نشان داده شده است. پاره‌خط راست AH ارتفاع آن است. بنابراین، اگر مساحت مثلث ABC را با S نشان دهیم، داریم:

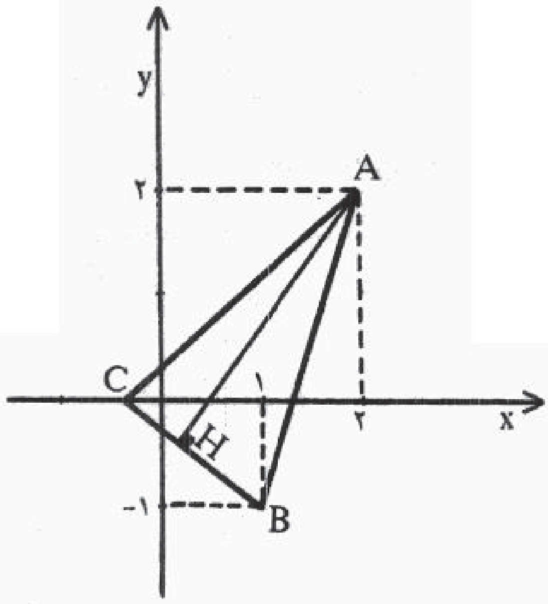
$$S = \frac{۱}{۲}|BC| \cdot |AH|$$

طول پاره‌خط راست BC (قاعدهٔ مثلث)، به سادگی به دست می‌آید:

$$|BC| = \sqrt{\left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)^۲ + (-۱ - ۰)^۲} = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} + ۱} = \frac{۵}{۳}$$

برای پیدا کردن طول ارتفاع AH، باید معادلهٔ خط راست AH را پیدا کرد و چون نقطهٔ H، محل برخورد دو خط راست BC و AH است، مختصات نقطهٔ H را، به عنوان نقطهٔ برخورد دو خط راست، به دست آورد.

معادلهٔ خط راست BC را $y = mx + n$ می‌گیریم. این خط راست، از نقطه‌های B و C می‌گذرد؛ بنابراین باید مختصات این دو نقطه، در معادلهٔ



شکل ۴۶

BC صدق کنند:

$$\begin{cases} -۱ = m + n \\ ۰ = -\frac{۱}{۳}m + n \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{۳}{۴}, n = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین، معادلهٔ خط راست BC، چنین است:

$$y = -\frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳x + ۴y + ۱ = ۰$$

چون خط راست AH بر خط راست BC عمود است، ضریب زاویه‌ای برابر $\frac{۴}{۳}$ دارد. پس معادلهٔ خط راست AH به صورت $y = \frac{۴}{۳}x + n$ است که باید، مختصات نقطهٔ A در آن صدق کند.

$$۲ = \frac{۴}{۳} \times ۲ + n \Rightarrow n = -\frac{۲}{۳}$$

یعنی، معادلهٔ خط راست AH، چنین است:

$$y = \frac{۴}{۳}x - \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۴x - ۳y - ۲ = ۰$$

و مختصات نقطهٔ H، جواب دستگاه زیر (شامل معادله‌های خط‌های راست BC و AH) خواهد بود:

$$\begin{cases} ۳x + ۴y + ۱ = ۰ \\ ۴x - ۳y - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۲}{۵} \end{array} \right.$$

با در دست داشتن مختصات نقطه‌های A و H، طول ارتفاع AH به دست می‌آید:

$$|AH| = \sqrt{\left(۲ - \frac{۱}{۵}\right)^{۲} + \left(۲ + \frac{۲}{۵}\right)^{۶}} = \sqrt{\frac{۲۲۵}{۲۵}} = ۳$$

و مقدار مساحت مثلث ABC:

$$S = \frac{۱}{۲}|BC| \cdot |AH| = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۳} \times ۳ = \frac{۵}{۲} \text{ (واحد مربع)}$$

یادداشت مهم. در مثال ۱۴، طول ارتفاع AH، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A از خط راست BC. برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط راست (وقتی مختصات نقطه و معادلهٔ خط راست معلوم باشد)، می‌توان یک دستور به دست آورد.

فرض کنید بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ را، از خط راست d به معادلهٔ

$$ax + by + c = ۰ \qquad (۱)$$

به دست آوریم. باید شبیه مثال ۱۴، معادلهٔ خط راست AH (H، پای عمود وارد از A بر خط راست d است) را به دست آورد، سپس با حل دستگاهی که، معادله‌های آن، معادله‌های خط‌های راست d و AH است، مختصات نقطهٔ H را پیدا کرد و، سرانجام، با معلوم بودن مختصات دو نقطهٔ A و H،

طول پاره‌خط راست AH را معین کرد. عمل‌ها دشوار نیست، ولی طولانی و خسته کننده است، ولی با توجه به نکته‌هایی، می‌توان سریع‌تر، به نتیجه رسید.

ضریب زاویهٔ خط راست d برابر $-\frac{a}{b}$ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ خط راست AH برابر $\frac{b}{a}$ است. باید مختصات نقطهٔ A، یعنی $x_۱$ و $y_۱$، در معادلهٔ خط راست AH، که به صورت

$$y = \frac{b}{a}x + n \qquad (*)$$

است، صدق کند:

$$y_۱ = \frac{b}{a}x_۱ + n$$

اگر برابری اخیر را از برابری $(*)$ کم کنیم، به دست می‌آید:

$$y - y_۱ = \frac{b}{a}(x - x_۱) \Rightarrow \frac{y - y_۱}{b} = \frac{x - x_۱}{a}$$

که همان معادله خط راست AH است. باید، با در نظر گرفتن این معادله و معادلهٔ (۱)، مقدارهای x و y را به دست آوریم. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم:

$$\frac{y - y_۱}{b} = \frac{x - x_۱}{a} = \lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = x_۱ + a\lambda \text{ و } y = y_۱ + b\lambda$$

اگر این مقدارهای x و y را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، مقدار λ به دست می‌آید.

$$\lambda = -\frac{ax_۱ + by_۱ + c}{a^۲ + b^۲}$$

اکنون مجذور طول پاره‌خط راست AH را، که h می‌نامیم، محاسبه می‌کنیم. در ضمن توجه کنیم که (x, y)، همان مختصات نقطهٔ H است و داریم:

$$x - x_۱ = a\lambda \text{ و } y - y_۱ = b\lambda;$$

$$h^۲ = |AH|^۲ = (x - x_۱)^۲ + (y - y_۱)^۲ = a^۲\lambda^۲ + b^۲\lambda^۲ =$$

$$= (a^۲ + b^۲)\lambda^۲ = \frac{(ax_۱ + by_۱ + c)^۲}{a^۲ + b^۲}$$

از آن‌جا

$$h = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ به مختصات $A(x_۱, y_۱)$ از خط راست d، باید معادلهٔ خط راست d را به صورت

$$ax + by + c = ۰$$

نوشت، سپس، مختصات نقطهٔ A را در عبارت سمت چپ معادلهٔ d قرار داد و قدر مطلق نتیجه را بر $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ (جذر مجموع مجذورهای ضریب‌های x و y در معادلهٔ d) تقسیم کرد. مثلاً در مثال ۱۴، مختصات A برابر $(۲, ۲)$ و معادلهٔ خط راست BC به صورت

$$۳x + ۴y + ۱ = ۰$$

بود. بنابراین، طول ارتفاع AH (فاصلهٔ A از خط راست BC) چنین می‌شود:

$$AH = \frac{|۳ \times ۲ + ۴ \times ۲ + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}} = ۳$$

نتیجه ۵. *دستورهایی برای به دست آوردن معادلهٔ خط راست.* از هندسه می‌دانیم، خط راست، با در اختیار داشتن دو نقطه از آن (به شرطی که بر هم منطبق نباشند) معین می‌شود. در «هندسهٔ تحلیلی» هم، با توجه به مثال‌هایی که حل کردیم، روشن شد که، با در دست داشتن یک نقطه و ضریب زاویه یا با در دست داشتن دو نقطه از خط راست، می‌توان معادلهٔ آن را به دست آورد. می‌گویند: *خط راست به دو پارامتر بستگی دارد.* در ضمن دیدیم، اگر در معادلهٔ کلی خط راست، یعنی

$$ax + by + c = 0$$

b مخالف صفر باشد، معادله به صورت $y = mx + n$ درمی‌آید که تنها به دو پارامتر m و n بستگی دارد. در حالتی هم که امکان صفر بودن b وجود داشته باشد، بی‌تردید مقدار a مخالف صفر است (زیرا a و b، با هم، برابر صفر نیستند) و، در این صورت، معادلهٔ خط راست را می‌توان به صورت $x = my + n$ در نظر گرفت که، باز هم، دارای دو پارامتر است.

برای دو حالتی که یک نقطه و ضریب زاویه، یا دو نقطه از خط راست معلوم باشد، می‌توان دستورهایی پیدا کرد که، به یاری آن‌ها، بتوان معادلهٔ خط راست را، بدون محاسبه نوشت.

۱) *وقتی که ضریب زاویه و یک نقطه از خط راست در دست باشد.* فرض می‌کنیم، خط راست d که از نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد، ضریب زاویه‌ای برابر m داشته باشد. در این صورت، معادله خط راست d به صورت

$$y = mx + n \qquad (1)$$

است که باید مختصات نقطهٔ A در آن صدق کند، یعنی

$$y_1 = mx_1 + n \qquad (2)$$

از تفاضل معادله‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \qquad (I)$$

و این، همان معادلهٔ خط راست d است.

یادداشت. با در دست داشتن یک نقطه و ضریب زاویهٔ خط راست d، می‌توان بدون پیدا کردن معادلهٔ d، خط راست را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

مثال ۱۵. در دستگاه محورهای مختصات، خط راستی را رسم کنید که ضریب زاویه (m) و یک نقطه (A) از آن معلوم باشد:

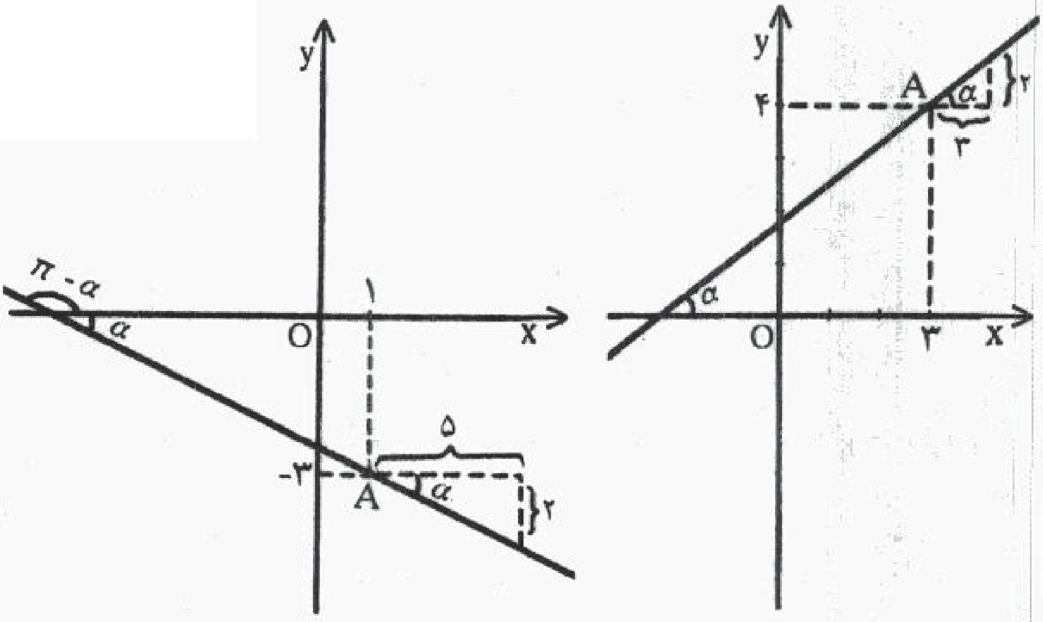
$$\text{الف)}\ m = \frac{۲}{۳}\ \text{و}\ A(۳, ۴);$$

$$\text{ب)}\ m = -\frac{۲}{۵}, A(۱, -۳)$$

شکل ۴۷_الف مربوط به حالت الف و شکل ۴۷_ب، مربوط به حالت ب است:

نقطهٔ A را در صفحهٔ دستگاه محورهای مختصات پیدا می‌کنیم؛ سپس از نقطهٔ A به اندازهٔ مخرجِ عدد ضریب زاویه در جهت افقی و همیشه در جهت راست و از انتهای آن، به اندازهٔ صورت عدد ضریب زاویه، روی خط قائم (اگر ضریب زاویه مثبت باشد، به طرف بالا و اگر ضریب زاویه منفی باشد، به طرف پایین) جدا می‌کنیم. اگر از نقطه‌ای که به دست می‌آید، به A وصل کنیم، همان خط راست d را به ما می‌دهد (استدلال ساده است؛ خودتان آن را ارائه دهید).

۲) *وقتی که دو نقطه از خط راست d داده شده باشد.* اگر دو نقطه از خط راست d معلوم باشد، می‌توان ضریب زاویهٔ خط راست d را پیدا کرد که، در این صورت، به همان حالت قبل می‌رسیم.



شکل ۴۷

شکل ۴۸ همه چیز را روشن می‌کند. در مثلث ABC داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha = m = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}$$

نسبت تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌های دو نقطه، ضریب زاویهٔ خط راستی را می‌دهد که از آن دو نقطه گذشته است.

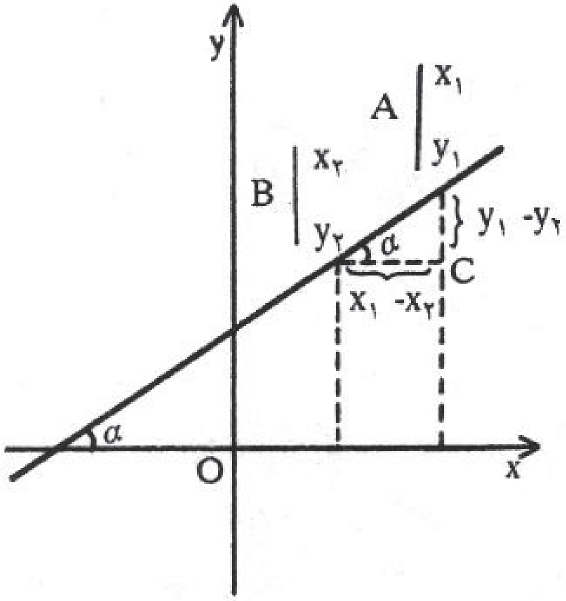
اکنون فرض کنید، بخواهیم معادلهٔ خط راستی را پیدا کنیم که از دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ گذشته است.

ضریب زاویهٔ خط راست AB چنین است:

$$m = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}$$

با توجه به این ضریب زاویه و مختصات نقطهٔ A، ضمن استفاده از دستور (I)، معادلهٔ خط راست AB چنین می‌شود:

$$y - y_۱ = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲}(x - x_۱)$$



شکل ۴۸

که بهتر است به صورت زیر به خاطر سپرده شود:

$$\frac{y - y_۱}{x - x_۱} = \frac{y_۱ - y_۲}{x_۱ - x_۲} \qquad \text{(II)}$$

مثال ۱۶. *نقطه‌های $A(-۲, -۱)$، $B(۲, ۳)$ و $C(۴, -۲)$ مفروض‌اند. مطلوب است معادله ضلع AB و ارتفاع CC'.*

معادلهٔ ضلع AB (یعنی خط راستی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد)، به یاری دستور (II) به دست می‌آید:

$$\frac{y + ۱}{x + ۲} = \frac{-۱ - ۳}{-۲ - ۲} \Rightarrow x - y + ۱ = ۰$$

ضریب زاویهٔ خط راست AB برابر است با ۱؛ بنابراین ضریب زاویهٔ ارتفاع CC' (که بر AB عمود است)، برابر ۱− می‌شود. معادلهٔ ارتفاع CC' (با معلوم بودن مختصات نقطهٔ C و ضریب زاویهٔ ارتفاع)، به یاری دستور (I) به دست می‌آید:

$$y + ۲ = -۱(x - ۴) \Rightarrow x + y - ۲ = ۰$$

نتیجه ۶. *نقطه‌ای که مختصات آن، بر حسب یک پارامتر داده شده است:*

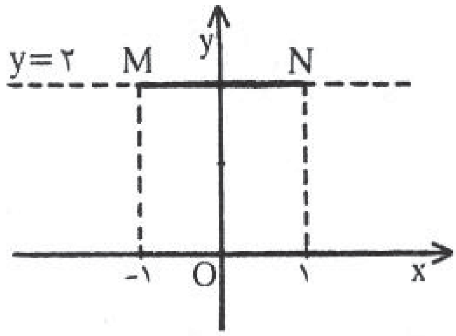
مکان هندسی یک نقطهٔ متغیر.

۱) نقطه $A(۱, m)$ را، با فرض حقیقی بودن عدد m، در نظر بگیرید. A، نقطهٔ ثابتی نیست و با تغییر m، جا یا مکان خود را، در صفحهٔ محورهای مختصات عوض می‌کند. با وجود این، A نمی‌تواند در هر جای دلخواهی از صفحه قرار گیرد. طول نقطهٔ A، مقداری ثابت و برابر ۱ است. A، تنها در مکان‌هایی می‌تواند باشد که طولی برابر ۱ داشته باشند. عرض این نقطه‌ها، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. بنابراین، نقطهٔ A، روی خط راست به معادلهٔ $x = ۱$ واقع است: $x = ۱$ را **مکان هندسی نقطهٔ A** گویند. گاهی می‌گویند: مجموعهٔ نقطه‌های A، خط راست $x = ۱$ را تشکیل می‌دهند.

۲) اکنون، نقطهٔ $B(\sin\alpha, ۲)$ را در نظر بگیرید، به شرطی که α بتواند برابر هر کمان دلخواه باشد. روشن است که (شبیه حالت قبل)، نقطهٔ B را باید روی خط راست $y = ۲$ جست‌وجو کرد. ولی آیا B می‌تواند روی هر نقطه‌ای از خط راست $y = ۲$ باشد؟ $\sin\alpha$، از -۱ کوچکتر و از ۱ بزرگتر نیست، بنابراین، طول این نقطه، نمی‌تواند کمتر از -۱ یا بیشتر از ۱ باشد و، در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ B، عبارت است از پاره‌خط راست MN که، در آن (شکل ۴۹):

$$M(-۱, ۲) \text{ و } N(۱, ۲)$$

۳) حالت کلی را در نظر می‌گیریم، وقتی که طول و عرض نقطه، هر دو شامل پارامتر باشند. $C(m - ۱, ۲m + ۱)$ را در نظر بگیرید. m عددی است حقیقی و، با تغییر آن، هر دو مختص C (هم طول و هم عرض آن) تغییر می‌کند. آیا C را می‌توان در هر نقطه‌ای از صفحه پیدا کرد؟ آیا مکان



شکل ۴۹

نقطهٔ C، تمامی صفحه مختصات است؟ نه! در این جا هم، طول و عرض نقطهٔ C مقیدند: در قید بستگی بین خودشان. طول و عرض C چنین‌اند:

$$\begin{cases} x = m - ۱ \\ y = ۲m + ۱ \end{cases} \qquad (*)$$

و شما نمی‌توانید، این x و y را، مستقل از یکدیگر و به دلخواه انتخاب کنید. اگر مثلاً بخواهید طول نقطهٔ C برابر ۲ باشد، باید داشته باشیم:

$$۲ = m - ۱ \Rightarrow m = ۳$$

یعنی مقدار m مشخص می‌شود و شما نمی‌توانید، عرض C را هم، به دلخواه انتخاب کنید. اگر در $y = ۲m + ۱$، به جای m، عدد ۳ را قرار دهید، برای عرض C، عدد ۷ به دست می‌آید. نقطهٔ با مختصات $(۲, ۷)$ یکی از نقطه‌های C است. می‌بینید، x و y (طول و عرض نقطهٔ C) به هم بستگی دارند و، با در دست داشتن یکی، می‌توان دیگری را پیدا کرد. x و y به هم مربوط‌اند، ولی با واسطهٔ m. اگر این واسطه را کنار بزنیم، بستگی بین x و y آشکار می‌شود. چگونه؟ چگونه بین برابری‌های $(*)$، m را حذف کنیم و رابطه‌ای، بدون دخالت m، بین x و y (یعنی طول و عرض نقطهٔ C) پیدا کنیم. یکی از راه‌ها، این است که، در یکی از دو برابری، m را به

دست بیاوریم و در دیگری به جای m بگذاریم:

$$x = m - ۱ \Rightarrow m = x + ۱,$$
$$y = ۲m + ۱ = ۲x + ۳$$

طول و عرض نقطهٔ C، به وسیلهٔ معادلهٔ $y = ۲x + ۳$ با هم بستگی دارند (یک بستگی خطی). و این، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ C است که، روی صفحهٔ محورهای مختصات، یک خط راست را مشخص می‌کند.

مثال ۱۷. *مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ*

$$D\left(\frac{۲ - m}{m} \text{ و } \frac{۲}{m}\right)$$

از هم اکنون، به یاد داشته باشیم که m نمی‌تواند برابر صفر شود. داریم:

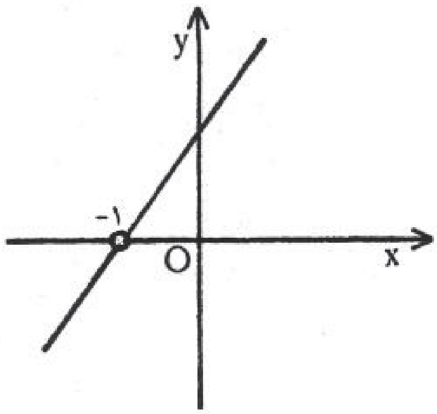
$$x = \frac{۲ - m}{m} \Rightarrow m = \frac{۲}{x + ۱},$$
$$y = \frac{۲}{m} = ۲ \times \frac{x + ۱}{۲} = x + ۱$$

در ضمن، از برابری $m = \frac{۲}{x + ۱}$، به شرط $x \neq -۱$ می‌رسیم. نقطهٔ D، روی خط راست $y = x + ۱$ حرکت می‌کند. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های این خط راست، به جز نقطه $(-۱, ۰)$ جزو مکان هندسی نقطهٔ D است. در شکل ۵۰، مکان نقطهٔ D رسم شده است. در نقطهٔ $(-۱, ۰)$، یک دایرهٔ توخالی کوچکی گذاشته‌ایم، یعنی این نقطه، جزو مکان نیست.

§۴. نمودار معادله‌هایی که شامل قدر مطلق‌اند.

۱. به این معادله توجه کنید:

$$y = |ax + b|$$



شکل ۵۰

به ازای مقدارهایی از x که، برای آن‌ها، $ax+b$ منفی نباشد، مقدار y برابر خود $ax+b$ می‌شود:

$$ax + b \geq \circ \Rightarrow y = ax + b$$

ولی اگر $ax+b$ مقداری منفی باشد، مقدار y، برابر قرینهٔ $ax+b$ خواهد بود:

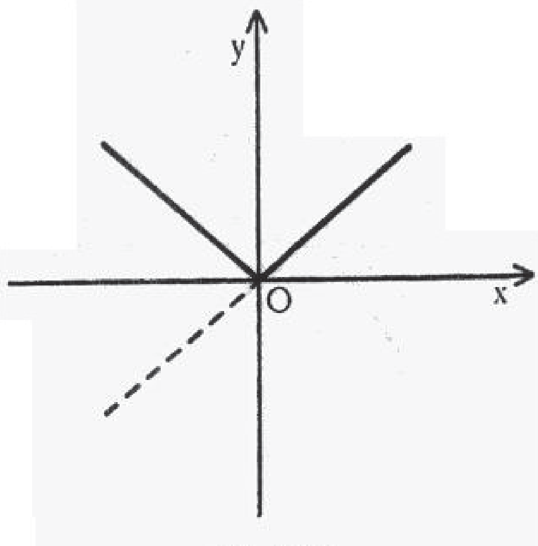
$$ax + b < \circ \Rightarrow y = -(ax + b)$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که، اگر نمودار

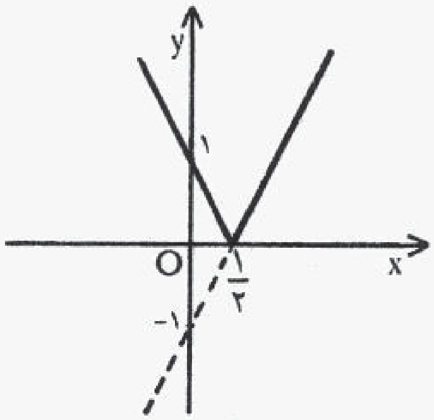
$$y = ax + b$$

را رسم کنیم، بخشی از آن که زیر محور $x'x$ نیست (بخشی که نقطه‌های آن، عرض منفی ندارند)، بر نمودار $y = |ax+b|$ منطبق است. ولی آن بخش از نمودار $y = ax + b$ را که زیر $x'x$ است (نقطه‌هایی با عرض منفی)، باید به قرینهٔ خود نسبت به محور $x'x$ تبدیل کرد تا بر نمودار $y = |ax+b|$ منطبق شود.

مثال ۱۸. *نمودار $y = |x|$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.* نمودار $y = x$ را رسم می‌کنیم. این نمودار، شامل دو بخش است:



شکل ۵۱



شکل ۵۲

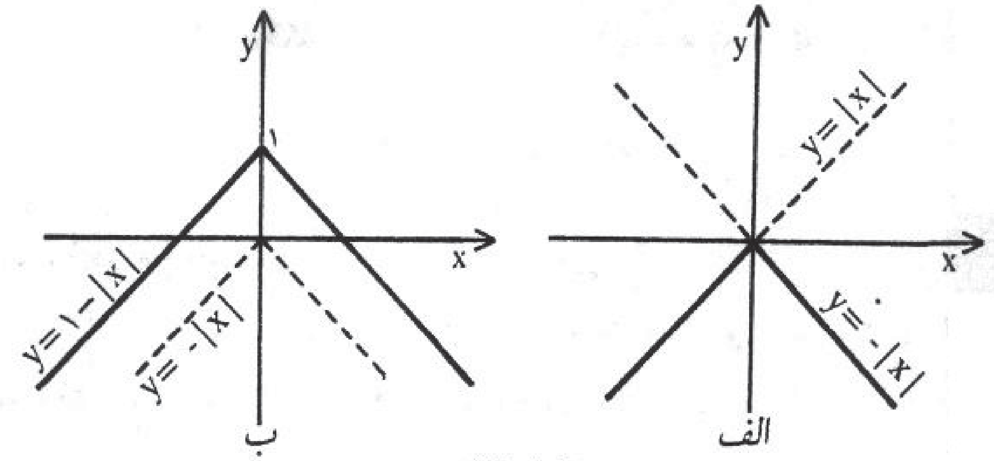
نیمساز زاویهٔ ربع اول و نیمساز زاویهٔ ربع سوم. اگر قرینهٔ بخش اخیر را نسبت به محور $x'x$ پیدا کنیم، نمودار $y = |x|$ (شامل نیمسازهای دو ربع اول و دوم) به دست می‌آید (شکل ۵۱).

مثال ۱۹. نمودار $y = |۲x - ۱|$ را رسم کنید.

نمودار $y = ۲x - ۱$ را (که یک خط راست است) رسم می‌کنیم و، سپس، بخشی از آن را، که زیر محور $x'x$ است، به قرینهٔ خود نسبت به محور $x'x$ تبدیل می‌کنیم (شکل ۵۲).

مثال ۲۰. نمودار $y = ۱ - |x|$ را رسم کنید.

روشن است که نمودار $y = -|x|$، عبارت است از قرینهٔ نمودار $y = |x|$ نسبت به محور $x'x$ (شکل ۵۳ـالف). عرض هر نقطه از نمودار



شکل ۵۳

$y = 1 - |x|$، یک واحد از عرض نقطهٔ متناظر خود در $y = -|x|$، بیشتر است. بنابراین، کافی است از نقطهٔ $(0, 1)$ (متناظر نقطهٔ $(0, 0)$ در $y = -|x|$)، نیم‌خط‌های راستی موازی شاخه‌های نمودار $y = -|x|$ رسم کنیم تا نمودار $y = 1 - |x|$ به دست آید (شکل ۵۳ـب).

۲. ممکن است با چند قدر مطلق سروکار داشته باشیم. در این حالت، باید مجموعهٔ عددهای حقیقی را، به چند فاصله، چنان تقسیم کرد که، در هر یک از آن‌ها، علامت مقدار داخل هر قدر مطلق روشن باشد. سپس، در هر فاصله، مقدار y را، بدون علامت قدر مطلق محاسبه و، در آن فاصله، روی صفحهٔ محورهای مختصات رسم کرد.

مثال ۲۱. *نمودار $y = |x - 2| - |x|$ را رسم کنید.*

در این‌جا، با دو قدر مطلق سروکار داریم: $|x|$ و $|x - 2|$. $|x|$ به‌ازای $x \geq 0$ برابر x و برای $x < 0$ برابر $-x$ است. $|x - 2|$، به ازای $x \geq 2$ برابر $x - 2$ و به ازای $x < 2$ برابر $-(x - 2)$ است. دو مقدار x را می‌توان مقدارهای سرنوشت‌ساز به حساب آورد: $x = 0$ و $x = 2$ (این دو عدد، از برابرِ صفر قرار دادن مقدارهای داخل قدر مطلق‌ها به دست می‌آیند).

عددهای ۰ و ۲، مجموعهٔ عددهای حقیقی را به سه بخش تقسیم می‌کنند:

$$x < 0; 0 \leq x < 2; x \geq 2$$

ببینیم، در هر حالت، y به چه صورتی درمی‌آید؟

۱) $x < 0$. وقتی مقدار x منفی باشد، به طور طبیعی، از ۲ هم کوچکتر است. بنابراین، در این حالت داریم:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \text{ و } |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

یعنی برای y خواهیم داشت:

$$y = -x - (2 - x) = -2$$

۲) $0 \leq x < 2$. در این حالت داریم:

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow |x| = x \text{ و } |x - 2| = 2 - x$$

و در نتیجه

$$y = x - (2 - x) = 2x - 2$$

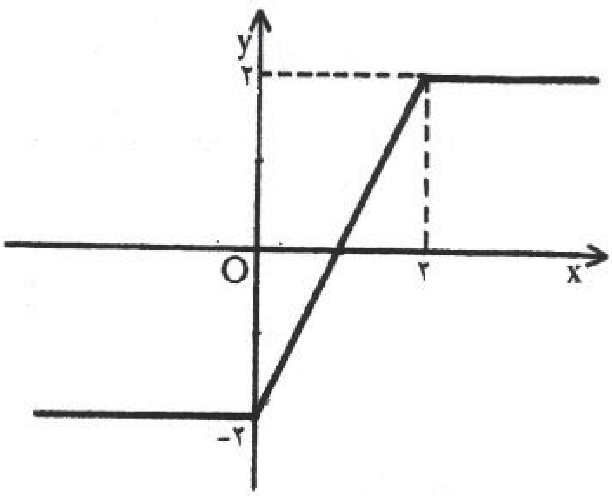
۳) $x \geq 2$. در این حالت

$$x \geq 2 \Rightarrow |x| = x \text{ و } |x - 2| = x - 2;$$

$$y = x - (x - 2) = 2$$

این سه حالت را می‌توان این طور نوشت:

$$y = \begin{cases} -2 & (x < 0) \\ 2x - 2 & (0 \leq x < 2) \\ 2 & (x \geq 2) \end{cases} \qquad (*)$$



شکل ۵۴

اکنون می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم (شکل ۵۴).

توجه کنید: نمودار $y = -۲$ را برای $x < ۰$، نمودار $y = ۲x - ۲$ را برای $۰ \le x < ۲$ و نمودار $y = ۲$ را برای $x \ge ۲$ رسم کرده‌ایم.

یادداشت. در $(*)$، جلو $y = -۲$ نوشته‌ایم $x < ۰$، در حالی که می‌توانستیم بنویسیم $x \le ۰$. برای این که، حالت $x = ۰$، دو جا تکرار نشود (در حالت $y = -۲$ و در حالت $y = ۲x - ۲$) تنها یکبار از آن استفاده کرده‌ایم. بدون این که دلیل خاصی داشته باشد. معمول شده است، علامت برابری را در کنار مقدارهای بزرگتر از آن می‌نویسند. اگر $x = ۵$، نقطه سرنوشت ساز باشد، $x < ۵$ را جدا از $x \ge ۵$ می‌نویسند.

تمرین‌ها

۱۲۱. جدول تغییر y نسبت به x و، سپس نمودار را رسم کنید.
۱) $y = -x^۲$؛ ۲) $y = x^۲ + ۲$؛ ۳) $y = -x^۲ + ۲x$؛ ۴) $y = x^۴ + x^۲$؛ ۵) $y = -۲x^۲ + ۴x - ۳$؛ ۶*) $y = x^۳ - ۳x$.

۱۲۲. خط‌های راستی را در نظر می‌گیریم که، معادلهٔ آن‌ها، به صورت

$$(a - ۱)x + ۲ay = a - ۳ \qquad (۱)$$

باشد. a چه عددی باشد، تا نمودار (۱)

۱) خط راستی موازی محور $y'y$ شود؛

۲) خط راستی موازی محور $x'x$ باشد؛

۳) از مبداء مختصات بگذرد؛

۴) موازی را نیمساز ربع‌های اول و سوم باشد؛

۵) موازیِ نیمساز ربع‌های دوم و چهارم باشد؛

۶) در نقطهٔ به طول ۲−، محور $x'x$ را قطع کند؛

۷) خط راست $x + y = ۳$ را در نقطهٔ به عرض ۲ قطع کند؛

۸) نقطهٔ برخورد آن با خط راست $۷x + ۵y = ۱$، روی محور $y'y$ باشد؛

۹) در نقطهٔ به عرض برابر واحد، خط راست

$$x + ay + a + ۱ = ۰$$

را قطع کند؛

۱۰) فاصله مبداء مختصات، از خط راست (۱)، برابر $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ باشد؛

۱۱) خط راست مفروض، بر خط راست

$$ax - (۲a + ۱)y = a + ۳$$

عمود باشد؛

۱۲) آیا خط راست (۱)، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد؟ اگر پاسخ به این پرسش، مثبت است، مختصات نقطهٔ ثابت را پیدا کنید.

۱۲۳. a، b، a' و b' چگونه باشند تا نمودار معادلهٔ

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

یک خط راست باشد؟

۱۲۴. نمودار را رسم کنید، به شرطی که داشته باشیم:

۱) $5 = 2y + 3x$؛ ۲) $2 = \frac{x+y-1}{x-y}$؛
۳) $\frac{1}{2} = \frac{x+y}{x+y-1}$؛ ۴) $x^2 = y^2$؛ ۵) $x^2 + x - 6 = 0$؛ ۶) $y^2 + xy = 0$؛ ۷) $x^2y - 7xy + 10y = 0$؛ ۸) $x = |y|$؛ ۹) $|x| + y = 0$؛ ۱۰) $|y| + x = 0$؛ ۱۱) $y = |x + 1|$؛ ۱۲) $y = x + |x|$؛ ۱۳) $y = |x| - x$؛ ۱۴) $y = |x - 1| - |x + 2|$؛ ۱۵) $x^2 + 2y^2 = 0$؛ ۱۶) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$؛ ۱۷) $x^2 + y^2 + 2 = 0$؛ *۱۸) $|x| + |y| = 1$.

۱۲۵. مختصات نقطه‌های برخورد را پیدا کنید:

۱) برای $x^2 + y^2 = 8$ و $x - y = 0$؛

۲) برای $x^2 - y^2 + 16x - 4y + 18 = 0$ و $x + y = 0$؛

۳) برای $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 17 = 0$ و $x^2 + y^2 = 5$

۱۲۶. معادلهٔ ضلع‌های AB، BC و AC از مثلث ABC، به ترتیب، چنین‌اند:

$$4x + 3y - 5 = 0, x - 3y + 10 = 0, x - 2 = 0$$

مطلوب است: ۱) مختصات راس‌ها؛ ۲) مساحت مثلث؛ ۳) مختصات نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها (منظور از معادلهٔ ضلع AB، معادلهٔ خط راستی است که از A و B می‌گذرد).

*۱۲۷. $x + y - 4 = 0$ و $x - 2y - 1 = 0$ معادله‌های دو ضلع و $x - 4y + 1 = 0$، معادلهٔ یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است. اگر مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع، روی محور طول باشد، مختصات چهار راس متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

*۱۲۸. مساحت مثلثی، $S = ۸$ واحد مربع و $A(۱, -۲)$ و $B(۲, ۳)$، دو راس آن هستند. اگر بدانیم راس C، روی خط راست $۲x + y - ۲ = ۰$ قرار دارد، مختصات آن را پیدا کنید.

۱۲۹. معادلهٔ خط راستی با ضریب زاویه $-\frac{۱}{۳}$ پیدا کنید که، عرض از مبداء آن، برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد.

۱۳۰. خط راستی به معادلهٔ $۵x + ۳y - ۳ = ۰$ داده شده است. معادله خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $M(۲, ۱)$ بگذرد و

۱) با خط راست مفروض موازی باشد؛

۲) بر خط راست مفروض عمود باشد.

۱۳۱. معادله‌های دو ضلع مستطیلی چنین‌اند:

$$۲x - ۳y + ۵ = ۰ \text{ و } ۳x + ۲y - ۷ = ۰$$

اگر $A(۲, -۳)$ یکی از راس‌های آن باشد، معادله‌های دو ضلع دیگر مستطیل را پیدا کنید.

۱۳۲. $x - ۲y = ۰$ و $x - ۲y + ۱۵ = ۰$ معادله‌های دو ضلع از یک مستطیل و $۷x + y - ۱۵ = ۰$ معادله یکی از قطرهای آن است. مختصات راس‌های مستطیل را پیدا کنید.

۱۳۳. تصویر نقطهٔ $P(-۶, ۴)$ را روی خط راست $۴x - ۵y + ۳ = ۰$ پیدا کنید.

۱۳۴. قرینهٔ نقطهٔ $P(-۵, ۱۳)$ را نسبت‌به‌خط‌راست $۲x - ۳y - ۳ = ۰$ پیدا کنید.

۱۳۵. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که، با هر یک از دو خط راست زیر موازی باشد و، در ضمن، از آن‌ها به یک فاصله باشد:

$$۲x + ۳y - ۶ = ۰ \text{ و } ۴x + ۶y + ۱۷ = ۰$$

۱۳۶. نقطه‌های $A(۵, -۴)$، $B(-۱, ۳)$ و $C(-۳, -۲)$ مفروض‌اند. از هر راس مثلث ABC، خط راستی موازی ضلع روبه‌روی آن رسم کرده‌ایم. این خط‌های راست، دو به دو یکدیگر را قطع کرده مثلث $A'B'C'$ را به وجود آورده‌اند. مطلوب است مختصات نقطه‌های A'، B' و C'.

۱۳۷. $A'(۲, ۱)$ وسط ضلع BC، $B'(۵, ۳)$ وسط ضلع AC و $C'(۳, -۴)$ وسط ضلع AB از مثلث ABC هستند. معادلهٔ هر یک از ضلع‌های مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۳۸. از مبداء مختصات، بر خط راست d عمودی رسم کرده‌ایم، نقطهٔ $P(۲, ۳)$ پای این عمود است. معادلهٔ خط راست d را پیدا کنید.

۱۳۹. $A(۱, -۱)$، $B(-۲, ۱)$ و $C(۳, ۵)$، راس‌های یک مثلث‌اند. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که از راس A می‌گذرد و بر میانهٔ $BB_۱$ عمود است.

۱۴۰. از نقطه‌های $M_۱(-۱, ۲)$ و $M_۲(۲, ۳)$، خط راستی گذرانده‌ایم. مختصات نقطه‌های برخورد خط راست $M_۱M_۲$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

۱۴۱. $A(-۳, ۱)$، $B(۳, ۹)$، $C(۷, ۶)$ و $D(-۲, -۶)$، راس‌های متوالی یک چهار ضلعی محدب‌اند. مختصات نقطهٔ برخورد قطرهای آن را پیدا کنید.

۱۴۲. $A(-۳, -۱)$ و $B(۲, ۲)$، دو راس مجاور از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، و $Q(۳, ۰)$ نقطهٔ برخورد قطرهای آن است، معادله‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۴۳. با چه شرطی، سه نقطهٔ

$$M_۱(x_۱, y_۱), M_۲(x_۲, y_۲), M_۳(x_۳, y_۳)$$

بر یک استقامت‌اند (یعنی روی یک خط راست قرار دارند).

۱۴۴. $5x + 2y - 7 = 0$ و $5x + 2y - 36 = 0$، معادله‌های دو ضلع از یک مستطیل و $3x + 7y - 10 = 0$، معادلهٔ یکی از قطرهای آن است. معادله‌های ضلع‌های دیگر و قطر دوم مستطیل را بنویسید.

۱۴۵. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $P(3, 5)$ بگذرد و از دو نقطهٔ $A(-7, 3)$ و $B(11, -15)$ به یک فاصله باشد.

۱۴۶. تصویر نقطهٔ $P(-8, 12)$ را بر خط راستی که از دو نقطهٔ $A(2, -3)$ و $B(-5, 1)$ می‌گذرد، بنویسید.

*۱۴۷. نقطهٔ M را، واقع بر محور $x'x$، طوری پیدا کنید که، مجموع فاصله‌های آن، از دو نقطهٔ $A(-3, 2)$ و $B(2, 5)$، کمترین مقدار ممکن باشد.

*۱۴۸. نقطهٔ P را روی خط راست $2x - y - 5 = 0$ طوری پیدا کنید که، مجموع فاصله‌های آن، از دو نقطهٔ $M(-7, 1)$ و $N(-5, 5)$، کمترین مقدار ممکن باشد.

*۱۴۹. روی خط راست $3x - y - 1 = 0$، نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که، تفاضل فاصله‌های آن تا دو نقطهٔ $A(4, 1)$ و $B(0, 4)$، بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۵۰. معادله‌های ضلع‌های مثلثی، چنین‌اند:

$$3x + 4y - 1 = 0, x - 7y - 17 = 0, 7x + y + 31 = 0$$

زاویه‌های این مثلث را به دست آورید.

۱۵۱. ثابت کنید، معادلهٔ خط راستی را که از نقطهٔ $M(x_1, y_1)$ موازی خط راست $ax + by + c = 0$ رسم شده باشد، می‌توان به این صورت نوشت:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

۱۵۲. ثابت کنید، شرط عمود بودن دو خط راست

$$a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰ \text{ و } a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$$

بر یکدیگر را، می‌توان به این صورت نوشت:

$$a_۱a_۲ + b_۱b_۲ = ۰$$

*۱۵۳. $A(-۱۰,۲)$ و $B(۶,۴)$ دو راس از مثلث ABC و $H(۵,۲)$، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های آن است. مطلوب است مختصات راس C.

*۱۵۴. $۵x - ۳y + ۲ = ۰$ معادله ضلع AB، $۴x - ۳y + ۱ = ۰$ معادلهٔ ارتفاع AM و $۷x + ۲y - ۲۲ = ۰$ معادلهٔ ارتفاع BN از مثلث ABC هستند. معادله‌های ضلع‌های BC و AC و مختصات راس C را پیدا کنید.

*۱۵۵. $x - ۲y + ۱ = ۰$ و $y - ۱ = ۰$، معادله‌های دو میانه و $A(۱,۳)$، یک راس از مثلث ABC هستند. معادلهٔ هر یک از ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۵۶. $۵x + ۳y - ۴ = ۰$ و $۳x + ۸y + ۱۳ = ۰$، معادله‌های دو ارتفاع و $B(-۴,-۵)$ یک راس از مثلث ABC هستند. معادلهٔ هر یک از ضلع‌های مثلث را بنویسید.

*۱۵۷. $x - ۱ = ۰$ و $x - y - ۱ = ۰$ معادله‌های دو نیمساز و $A(۴,-۱)$ یک راس از مثلث ABC هستند. معادلهٔ هر یک از ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

*۱۵۸. معادله‌های ضلع‌های مثلثی را پیدا کنید که $C(۴,۳)$ یکی از راس‌های آن، $x - y + ۱۳ = ۰$، معادله ارتفاع BH و $x + ۲y - ۵ = ۰$، معادله نیمساز AD از آن باشد.

۱۵۹. $۲x + ۳y = ۰$ و BH، معادلهٔ ارتفاع $۲x - ۳y + ۱۲ = ۰$، معادله میانه BM از مثلث ABC هستند. اگر $A(۴, -۱)$، یکی از راس‌های مثلث باشد، معادله‌های ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۶۰. $x + ۲y + ۷ = ۰$ و BH معادلهٔ ارتفاع $۳x + y + ۱۱ = ۰$ معادلهٔ میانهٔ CM و $A(۲, -۷)$ راس مثلث ABC هستند. معادله‌های ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

*۱۶۱. معادله خط راستی را پیدا کنید که از مبداء مختصات بگذرد و با خط‌های راست

$$x - y + ۱۲ = ۰ \text{ و } ۲x + y + ۹ = ۰$$

مثلثی با مساحت $\frac{۳}{۲}$ واحد مربع تشکیل دهد.

۱۶۲. بین خط‌های راستی که از نقطهٔ $P(۳, ۰)$ می‌گذرند، آن را پیدا کنید که، اگر دو خط راست

$$۲x - y - ۲ = ۰ \text{ و } x + y + ۳ = ۰$$

را در نقطه‌های A و B قطع کند، P وسط دو نقطهٔ A و B باشد.

۱۶۳. از نقطهٔ $P(-۳, -۱)$، همهٔ خط‌های راست ممکن را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، همهٔ این خط‌های راست، در برخورد با دو خط راست

$$x - ۲y - ۳ = ۰ \text{ و } x - ۲y + ۵ = ۰$$

پاره‌خط‌هایی به وجود می‌آورند که، نقطهٔ P، وسط هر یک از آن‌ها است.

۱۶۴. خط راستی از مبداء مختصات گذشته است و پاره‌خط راستی از آن، که بین دو خط راست

$$۲x - y + ۵ = ۰, ۲x - y + ۱۰ = ۰$$

واقع شده است، طولی برابر $\sqrt{۱۰}$ دارد. معادلهٔ این خط راست را پیدا کنید.

۱۶۵. دو نقطهٔ $A(-۴,-۳)$ و $B(۱,۲)$ مفروض‌اند. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ C واقع بر پاره‌خط راست AB بگذرد و بر خط راست AB عمود باشد، به شرطی که بدانیم:

$$|AC|:|CB| = ۱:۲$$

۱۶۶. معادله‌های دو ضلع از لوزی $ABCD$ و قطر AC از آن، چنین‌اند:

$$(BC): x + ۲y = ۴ \text{ و } (AD): x + ۲y = ۱۰$$
$$(AC): y = x + ۲$$

مختصات راس‌های این لوزی را پیدا کنید.

۱۶۷. $A(۱,۴)$ و $C(۵,۶)$، دو راس رو به رو از یک مستطیل‌اند. اگر خط راستی که از ضلع CD می‌گذرد، با جهت مثبت محور $x'x$، زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه ساخته باشد، مساحت مستطیل را پیدا کنید.

۱۶۸. طول ضلع مربعی برابر است با $۴\sqrt{۲}$. مطلوب است، معادلهٔ هر ضلع و هر قطر آن، به شرطی که یکی از راس‌های آن بر مبداء مختصات قرار داشته و یکی از قطرهای آن بر جهت مثبت محور $y'y$ منطبق باشد.

۱۶۹. ۱) معادلهٔ ضلع‌های مثلثی را پیدا کنید که $C(۴,۳)$، یکی از راس‌های‌آن، $x+۲y-۵=۰$ معادله‌نیمساز BDو $۴x+۱۳y-۱۰=۰$، معادلهٔ میانهٔ BM از آن باشد.

*۲) معادلهٔ هر یک از ضلع‌های مثلثی را پیدا کنید که $C(۳,-۱)$ یک راس آن، $x-۴y+۱۰=۰$ معادلهٔ نیمساز BD و $۶x+۱۰y-۵۹=۰$ معادله میانهٔ AM از آن باشد.

۱۷۰. یک راس از مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول ۸، بر مبداء مختصات و یکی از ضلع‌های آن بر جهت مثبت محور $y'y$ منطبق است. معادلهٔ هر ضلع مثلث را پیدا کنید.

۱۷۱. خط راستی با جهت مثبت محور $x'x$ زاویهٔ ۱۳۵ درجه ساخته است و پاره‌خط راستی از آن که بین دو محور واقع است، طولی برابر $۳\sqrt{۲}$ دارد. معادلهٔ آن را پیدا کنید.

۱۷۲. نقطه‌های $O(۰, ۰)$ و $A(-۳, ۰)$ مفروض‌اند. روی پاره‌خط راست OA، متوازی‌الاضلاعی ساخته‌ایم که، قطرهای آن، در نقطهٔ $M(۰, ۲)$، یکدیگر را قطع کرده‌اند. معادله‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۷۳. قطرهای یک لوزی، بر محورهای مختصات منطبق‌اند. مساحت این لوزی را پیدا کنید، به شرطی که، معادلهٔ یکی از ضلع‌های آن، چنین باشد؛

$$\frac{x}{۲/۵} + \frac{y}{۱۰} = ۱$$

۱۷۴. ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول $۶\sqrt{۳}$، بر جهت مثبت oy و قاعدهٔ آن بر محور $x'x$ قرار دارد. معادلهٔ دو ضلع جانبی مثلث را پیدا کنید.

۱۷۵. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌دانیم، قاعدهٔ بزرگتر بر محور $x'x$ و محور تقارن ذوزنقه بر محور $y'y$ قرار دارد؛ طول قاعدهٔ بزرگتر برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ کوچکتر برابر ۶ است. ساق‌های ذوزنقه، با قاعدهٔ بزرگتر، زاویه‌ای برابر ۶۰ درجه ساخته‌اند. معادلهٔ هر یک از ضلع‌های ذوزنقه را پیدا کنید.

۱۷۶. معادلهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی، عبارت است از $۳x - ۷y = ۲۰$. در ضمن $C(۷, -۴)$، یکی از راس‌های مثلث است. معادلهٔ هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه را، در این مثلث، بنویسید.

۱۷۷. قطرهای یک لوزی، یکدیگر را در نقطهٔ $M(۵,۱)$ قطع کرده‌اند. معادلهٔ یکی از قطرها $y = x - ۴$ و معادلهٔ یکی از ضلع‌ها $۳y = x + ۶$ است. مختصات راس‌های لوزی را پیدا کنید.

۱۷۸. $A(۳,-۱)$ و $B(۵,۵)$ دو راس از مثلث ABC و $H(۶,۲)$ نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های آن است. مختصات راس سوم را پیدا کنید.

*۱۷۹. پرتو نور با عبور از نقطهٔ $A(۳,۴)$ بر خط راست $y = ۱$ تابیده و، سپس، بازتاب آن از نقطهٔ $B(-۹,۴)$ گذشته است. معادلهٔ مسیر پرتو و مسیر بازتاب آن را پیدا کنید.

۱۸۰. ثابت کنید، دو خط راست وجود دارند که از نقطهٔ $P(۲,۷)$ می‌گذرند و فاصلهٔ نقطهٔ $Q(۱,۲)$ تا هر یک از آن‌ها، برابر است با ۵. معادلهٔ هر یک از این دو خط راست را پیدا کنید.

۱۸۱. مکان هندسی هر یک از نقطه‌ها را پیدا کنید:

۱) $A\left(\frac{۱}{m}, ۲\right)$؛ ۲) $B\left(۱, \frac{\alpha^۲}{\alpha^۲ + ۱}\right)$؛ ۳) $D(m, ۲m)$؛

۴) $E(m + ۴, ۳m)$؛ ۵) $F(\sin\alpha, ۳\sin\alpha - ۱)$؛

۶) $G(۲m + ۱, ۴m^۲ - ۲m)$

۱۸۲. نقطه‌های $A(۵,۰)$ و $B(۱,۴)$ مفروض‌اند. اگر برای نقطهٔ M از صفحهٔ محورهای مختصات داشته باشیم:

$$|MA|^۲ - |MB|^۲ = ۱۶$$

مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

۱۸۳. اگر a عددی حقیقی با شرط $a \geq ۱$ باشد و داشته باشیم:

$$M(\sqrt{a - ۱}, a + ۱)$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M را مشخص و، سپس، آن را رسم کنید.

۱۸۴. $۲x + y = ۳$ و $x + ۲y = ۰$، ضلع‌های یک زاویه‌اند. خط راست $y = x + a$، ضلع‌های این زاویه را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، وسط پاره‌خط راست AB.

۱۸۵. $M(۰, a)$ و $A(-۲, ۰)$ و $B(۰, ۲)$ مفروض‌اند. خط راست MA، محور عرض را در نقطهٔ C و خط راست MB، محور طول در نقطهٔ D قطع کرده‌اند. ثابت کنید، به ازای همهٔ مقدارهای حقیقی a، خط راست CD از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. مختصات این نقطه را پیدا کنید.

۱۸۶. نقطهٔ $F(۰, ۱)$ و خط راست $y + ۱ = ۰$ مفروض‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید، به شرطی که طول پاره‌خط راست MF با فاصلهٔ M از خط راست $y + ۱ = ۰$ برابر باشد.

۱۸۷. $A(۵, ۰)$، $B(-۳, ۰)$ و $C(-۱, ۴)$ راس‌های یک مثلث‌اند. مستطیل‌هایی در نظر می‌گیریم که، برای هر کدام از آنها، دو راس بر ضلع‌های CA و CB و دو راس بر ضلع AB واقع باشد. مکان هندسی مرکز این مستطیل‌ها را پیدا کنید.

۱۸۸. نقطهٔ $A(m^۲ + m + ۱, m^۲ - m + ۱)$ مفروض است. اگر m عددی حقیقی باشد، معادلهٔ مکان نقطهٔ A را پیدا کنید.

۱۸۹. خط راست $\frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} = ۱$ داده شده است. نیم‌خط راستی از مبداء مختصات گذشته و این خط راست را در نقطهٔ P قطع کرده است. روی نیم‌خط راست، نقطهٔ M را در امتداد OP طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$$|OM| : |OP| = ۳$$

مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M.

*۱۹۰. مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($|AB| = |AC|$) و طول ارتفاع AO برابر نصف طول قاعدهٔ BC است. خط راستی که موازی

قاعدهٔ BC رسم کرده‌ایم، ضلع AB را در P و ضلع AC را در Q قطع می‌کند. نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست OP و BQ را M می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ M را، وقتی خط راست PQ موازی با خودش حرکت می‌کند، پیدا کنید.

*۱۹۱. معادله‌های ضلع‌های مثلثی چنین‌اند:

$$(AB): x + ۲y - ۵ = ۰, (AC): ۳x - y - ۱ = ۰,$$
$$(BC): ۳x - ۲y - ۳ = ۰$$

بدون این که مختصات راس A را پیدا کنید، معادلهٔ ارتفاع AH را به دست آورید.

۴. معادلهٔ درجه دوّم

§۱. دستور حل معادلهٔ درجه دوّم

در درس‌های گذشته، بارها با معادلهٔ درجه دوم برخورد کردیم و توانستیم از عهدهٔ حل آن‌ها برآییم و ریشه‌های آن‌ها را (اگر عددهای حقیقی بودند)، به دست آوریم. اکنون زمان آن فرا رسیده است که بحث کاملی دربارهٔ معادلهٔ درجه دوم داشته باشیم.

صورت کلی معادلهٔ درجه دوم، چنین است:

$$ax^{۲} + bx + c = ۰, a \neq ۰ \qquad (۱)$$

شرط $a \neq ۰$ را به این جهت گذاشته‌ایم که، در حالت $a = ۰$، معادلهٔ (۱)، به معادله‌ای درجه اول (خطی) تبدیل می‌شود.

در حالت‌هایی که معادلهٔ (۱)، کامل نباشد، به سادگی قابل حل است.

۱) در حالت $c = ۰$ و $b \neq ۰$، معادلهٔ (۱) به صورت

$$ax^{۲} + bx = ۰, a \neq ۰$$

درمی‌آید که با تجزیهٔ سمت چپ برابری، ریشه‌ها به دست می‌آیند:

$$ax^{۲} + bx = ۰ \Rightarrow x(ax + b) = ۰$$

که به سادگی، دو ریشهٔ معادله، یعنی $x_1 = 0$ و $x_2 = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آیند.

نتیجهٔ ۱. برای این که معادلهٔ درجهٔ دوم، دست‌کم یک ریشهٔ برابر صفر داشته باشد، لازم و کافی است که، مقدار ثابت آن (c) برابر صفر شود.

۲) $b = 0$ و $c \neq 0$ معادلهٔ (۱) به صورت

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

درمی‌آید و روشن است که وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که a و c، هم علامت نباشند (در حالت هم علامت بودن a و c، برای x^2، عددی منفی به دست می‌آید و، مقدار x، نمی‌تواند عددی حقیقی باشد). در حالتی که a و c هم علامت نیستند ($a \cdot c < 0$)، ریشه‌ها چنین‌اند:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

نتیجهٔ ۲. برای این که معادلهٔ درجه دوم دو ریشهٔ قرینه و حقیقی داشته باشد، لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$b = 0,\ ac < 0$$

۳) $b = c = 0$ در این حالت، معادلهٔ (۱) به صورت

$$ax^2 = 0$$

درمی‌آید که تنها $x = 0$ در آن صدق می‌کند. در این جا، بهتر است بگوییم: معادله دارای دو ریشهٔ برابر صفر است:

$$x_1 = x_2 = 0$$

نتیجهٔ ۳. شرط لازم و کافی، برای این که هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم، برابر صفر باشند، این است که داشته باشیم:

$$b = c = 0$$

اکنون به حل معادلهٔ (۱)، در حالتی که هیچ کدام از ضریب‌ها برابر صفر نیست، می‌پردازیم.

با همان روشی که در گذشته به کار می‌بردیم (روش تبدیل به مجذور کامل)، کوشش می‌کنیم، سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت چپ معادلهٔ (۱) را، تجزیه کنیم (اگر ممکن باشد). ابتدا دو طرف برابری را بر $a \neq 0$ تقسیم می‌کنیم (a را می‌توان مثبت فرض کرد، بدون این که، به کلی بودن مطلب، لطمه‌ای وارد شود)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

اگر به دو جمله‌ای $x^2 + \frac{b}{a}x$، جملهٔ $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه کنیم، یک سه جمله‌ای به دست می‌آید که می‌تواند به صورت $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$، یعنی مجذور یک دو جمله‌ای نوشته شود. بنابراین، اگر به سمت چپ برابری اخیر، یکبار $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه و یکبار کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

که می‌توان آن را، این طور نوشت:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad (2)$$

در این‌جا، سه حالت ممکن است پیش آید:

۱) $b^۲ - ۴ac = ۰$. معادله (۲) چنین می‌شود:

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = -\frac{b}{۲a}$$

می‌بینید، باز هم دو ریشه را در نظر گرفتیم؛ می‌گوییم معادلهٔ (۱)، در این حالت، دو ریشهٔ برابر دارد. در واقع

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \left(x + \frac{b}{۲a}\right)\left(x + \frac{b}{۲a}\right) = ۰$$

اگر هر کدام از دو پرانتز را برابر صفر قرار دهیم، به همان ریشهٔ $-\frac{b}{۲a}$ می‌رسیم.

در این حالت، گاهی به جای این که بگویند، معادلهٔ (۱)، دو ریشهٔ برابر دارد، می‌گویند: *معادلهٔ (۱) دارای ریشهٔ مضاعف است.*

نتیجهٔ ۴. برای این که معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ برابر (یا یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$b^۲ - ۴ac = ۰$$

در این صورت، هر یک از دو ریشه، برابر $-\frac{b}{۲a}$ می‌شود.

۲) $b^۲ - ۴ac < ۰$ در این حالت داریم:

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲} = ۰$$

مجموع دو مقدار هم‌علامت، یا دقیق‌تر در حالت

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ \geq ۰ \text{ و } \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲} > ۰$$

عبارت سمت چپ برابری قابل تجزیه نیست. معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا مجموع دو مقداری که یکی غیر منفی و دیگری مثبت است نمی‌تواند برابر صفر شود.

نتیجهٔ ۵. برای این که معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، لازم و کافی است که داشته باشیم: $b^۲ - ۴ac < ۰$.

۳) $b^۲ - ۴ac > ۰$. در این حالت، عبارت سمت چپ برابری (۲) قابل تجزیه است:

$$\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right) - \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right) + \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right] = ۰$$

و یا

$$\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}\right) = ۰$$

که با صفر قرار دادن هر یک از پرانتزها، دو ریشهٔ معادلهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_۱ = \dfrac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}, \\ x_۲ = \dfrac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

و می‌توان آن‌ها را، به صورت یک دستور (دستور حل معادلهٔ درجه دوم) نوشت:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}} \qquad (۳)$$

یادداشت. ۱) اگر در معادلهٔ (۱)، ضریب جملهٔ درجه اول، یعنی b عددی زوج باشد، دستور (۳) ساده‌تر می‌شود. فرض کنید $b = ۲b'$. در این

صورت، دستور (۳)، این طور نوشته می‌شود:

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

این دستور، که به دستور b' مشهور است، کار محاسبه را در حالتی که b عددی زوج باشد، ساده‌تر می‌کند.

۲) سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. بسیار پیش می‌آید که از ریشه‌های این سه جمله‌ای یاد می‌شود. به یاد داشته باشید که، منظور از ریشه‌های سه جمله‌ای $ax^2 + bx + c$، ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ است.

۳) دیدیم نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (۱)، بستگی دارد به مقدار $b^2 - 4ac$:

ـ به شرط $b^2 - 4ac > 0$، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد؛

ـ به شرط $b^2 - 4ac = 0$، معادله دو ریشهٔ برابر دارد؛

ـ به شرط $b^2 - 4ac < 0$، معادله دو ریشهٔ موهومی دارد.

به این ترتیب، معادلهٔ درجه دوم، همیشه دو ریشه دارد، ولی این دو ریشه، ممکن است حقیقی و مختلف، یا برابر و یا موهومی باشند. عادت کنید: هرگز نگویید معادلهٔ درجه دوم یک ریشه دارد، بگویید دو ریشهٔ برابر یا یک ریشهٔ مضاعف دارد؛ هرگز نگویید، معادلهٔ درجه دوم ریشه ندارد؛ بگویید ریشهٔ حقیقی ندارد یا دو ریشهٔ موهومی دارد.

$b^2 - 4ac$ را، که مُعرف وضع ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم است، مُبَیِن آن گویند و اغلب، آن را، با حرف Δ نشان می‌دهند:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

۴) اگر در معادلهٔ درجه دوم (۱)، a و c، با علامت‌های متفاوت باشند،

یعنی داشته باشیم: $ac < 0$، آن وقت معادلهٔ (۱)، دو ریشهٔ حقیقی دارد، زیرا با منفی بودن ac، مقدار $b^2 - 4ac$ مثبت می‌شود.

ولی عکس این مطلب، همیشه درست نیست، یعنی ممکن است a و c هم علامت باشند و، در ضمن، معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

مثال ۱. *این معادله را حل کنید:*

$$\frac{x}{a} + \frac{2b - a}{x} = \frac{2b}{a}$$

قبل از همه باید توجه کنیم که $a \neq 0$ و $x \neq 0$، دو طرف برابری را، در ax ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + a(2b - a) = 2bx$$

که اگر آن را منظم کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$x^2 - 2bx + a(2b - a) = 0$$

چون ضریب x، عددی زوج است، از دستور b' استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a(2b - a)}}{1} = b \pm \sqrt{(a - b)^2} =$$
$$= b \pm (a - b) \Rightarrow x_1 = a, x_2 = 2b - a$$

مثال ۲. *این معادله را حل کنید:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b}$$

با فرض $x + a + b \neq 0$، $x \neq 0$، $a \neq 0$ و $b \neq 0$، دو طرف برابری را در عبارت $abx(x + a + b)$ ضرب می‌کنیم:

$$ab(x + a + b) + bx(x + a + b) + ax(x + a + b) = abx$$

ضرب‌ها را انجام می‌دهیم و ساده می‌کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$(a+b)x^{۲}+(a+b)^{۲}x+ab(a+b)=۰$$

دو حالت در نظر می‌گیریم: ۱) $a+b\neq ۰$. دو طرف برابری را بر $a+b$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^{۲}+(a+b)x+ab=۰$$

که با استفاده از دستور (۳) حل می‌شود:

$$\Delta=(a+b)^{۲}-۴ab=(a-b)^{۲};$$
$$x=\frac{-(a+b)\pm(a-b)}{۲}\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_{۱}=-a \\ x_{۲}=-b \end{array} \right.$$

۲) $a+b=۰$، یعنی $b=-a$. اگر $b=-a$ را در معادلهٔ صورت مساله قرار دهیم، به شرط صفر نبودن a و b (که شرط مساله است)، به برابری $\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x}$ می‌رسیم که یک اتحاد است. در این حالت، هر عددی به جز $x=۰$ جواب معادله است.

*مثال ۳. *این معادلهٔ درجه سوم را حل کنید:*

$$x^{۳}-(m+۲)x^{۲}+۲x+m^{۲}-۱=۰ \qquad (*)$$

این، یک معادلهٔ درجه سوم است و ما راه حل آن را نمی‌دانیم، به ویژه این که، همراه با پارامتر است. تجزیهٔ عبارت سمت چپ برابری هم، چندان ساده نیست. ولی، اگر به جای x، پارامتر m را مجهول بگیریم و عبارت سمت چپ برابری را بر حسب m منظم کنیم، به معادله‌ای درجه دوم (نسبت به m) می‌رسیم:

$$m^{۲}-x^{۲}m+(x^{۳}-۲x^{۲}+۲x-۱)=۰$$

البته، به شرطی از این راه به نتیجه می‌رسیم که، مبین این معادله، مجذور کامل باشد. آزمایش می‌کنیم:

$$\Delta = x^{۴} - ۴(x^{۳} - ۲x^{۲} + ۲x - ۱) =$$
$$= x^{۴} - ۴x^{۳} + ۸x^{۲} - ۸x + ۴ = (x^{۲} - ۲x + ۲)^{۲}$$

(پرانتز را به توان برسانید و درستی نتیجه را آزمایش کنید.) اکنون می‌توانیم معادله را حل و m را بر حسب x پیدا کنیم:

$$m = \frac{x^{۲} \pm (x^{۲} - ۲x + ۲)}{۲}$$

از این جا، دو جواب برای m به دست می‌آید:

$$m = x - ۱ \text{ یا } m = x^{۲} - x + ۱$$

از اولی، به سادگی، یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم، پیدا می‌شود:

$$x_{۱} = m + ۱$$

دومی، نسبت به x، یک معادلهٔ درجه دوم است:

$$x^{۲} - x + ۱ - m = ۰$$

مبین این معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = ۱ - ۴(۱ - m) = ۴m - ۳$$

اگر $m > \frac{۳}{۴}$، آن وقت $\Delta > ۰$ و

$$x_{۲} = \frac{۱ + \sqrt{۴m - ۳}}{۲}, x_{۳} = \frac{۱ - \sqrt{۴m - ۳}}{۲}$$

اگر $۴m - ۳ = ۰$، یعنی $m = \frac{۳}{۴}$، آن وقت

$$x_۲ = x_۳ = \frac{۱}{۲}$$

اگر $۴m - ۳ < ۰$، یعنی $m < \frac{۳}{۴}$، آن وقت، دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم موهومی است.

پاسخ ۱) برای $m > \frac{۳}{۴}$، معادلهٔ $(*)$، سه ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x_۱ = m + ۱, x_۲ = \frac{۱ + \sqrt{۴m - ۳}}{۲}, x_۳ = \frac{۱ - \sqrt{۴m - ۳}}{۲}$$

۲) برای $m = \frac{۳}{۴}$، معادلهٔ $(*)$، دارای سه ریشهٔ حقیقی است که، دو تای آن‌ها، با هم برابرند:

$$x_۱ = m + ۱ = \frac{۳}{۴} + ۱ = \frac{۷}{۴}, x_۲ = x_۳ = \frac{۱}{۲}$$

۳) برای $m < \frac{۳}{۴}$، معادلهٔ $(*)$، تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x = m + ۱$$

مثال ۴. *مقدار m را طوری پیدا کنید که، یکی از ریشه‌های معادلهٔ*

$$(m + ۵)x^۲ + (m - ۶)x + ۴ - m = ۰$$

برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد. سپس، معادله را حل کنید.

ریشهٔ معادله، باید در معادله صدق کند. $x = \frac{۱}{۲}$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{m + ۵}{۴} + \frac{m - ۶}{۲} + ۴ - m = ۰ \Rightarrow m = ۹$$

اگر مقدار $m = ۹$ را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$۱۴x^۲ + ۳x - ۵ = ۰$$

که به یاری دستور مربوط به حل معادلهٔ درجه دوم به دست می‌آید:

$$x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ + ۲۸۰}}{۲۸} = \frac{-۳ \pm ۱۷}{۲۸},$$

$$x_۱ = \frac{-۳ + ۱۷}{۲۸} = \frac{۱}{۲}; x_۲ = \frac{-۳ - ۱۷}{۲۸} = -\frac{۵}{۷}$$

مثال ۵. *در معادلهٔ درجه دوم زیر مقدار m را طوری پیدا کنید که، یکی از ریشه‌های معادله برابر m باشد:*

$$(m + ۳)x^۲ - (m^۲ - ۳)x + ۳m = ۰$$

باید $x = m$ در معادله صدق کند:

$$(m + ۳)m^۲ - (m^۲ - ۳)m + ۳m = ۰$$

که از آن، به معادلهٔ $۳m^۲ + ۶m = ۰$ می‌رسیم. این معادله دو ریشه دارد:

$$m = ۰ \text{ و } m = -۲$$

در حالت $m = ۰$، معادلهٔ درجه دوم اصلی، به صورت

$$۳x^۲ + ۳x = ۰$$

درمی‌آید که، یکی از ریشه‌های آن، برابر صفر است؛

در حالت $m = -۲$، به معادلهٔ

$$x^۲ - x - ۶ = ۰$$

می‌رسیم که، یکی از ریشه‌های آن، برابر ۲- است.

۲§. رابطه‌هایی بین ضریب‌ها و ریشه‌ها

۱. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

اگر دو ریشه را با هم جمع کنیم:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

یعنی، در هر معادلهٔ درجه دوم، مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ است که، در آن a ضریب x^2 و b ضریب x است.

همچنین، اگر دو ریشه را در هم ضرب کنیم:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

یعنی، در هر معادلهٔ درجه دوم، حاصل ضرب ریشه‌ها، برابر $\frac{c}{a}$ است که، در آن، a ضریب x^2 و c مقدار ثابت معادله است.

برابری‌های

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1 x_1 = \frac{c}{a}$$

دو رابطهٔ جالب را، بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادلهٔ درجه دوم نشان می‌دهند که، برای بررسی معادلهٔ درجه دوم و حل مساله‌های مربوط به آن، بسیار اهمیت دارند. این رابطه‌ها، به نام **دستورهای ویت** معروف‌اند

***فرانسوا ویت**، که این دستورها به نام اوست، یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی سدهٔ شانزدهم میلادی است. اوست که نوشتن عبارت‌های جبری به کمک حرف‌های الفبای لاتینی را در جبر (و به طور کلی، در ریاضیات) معمول کرد. واژهٔ «ضریب» را ویت به کار برد. او حقوق‌دان بود و به کارهای دولتی (در دربار فرانسه) مشغول بود. ولی از همهٔ وقت آزاد خود، برای ریاضیات استفاده می‌کرد و، گاهی که یک موضوع تازهٔ ریاضی ذهن او را مشغول می‌کرد، شب‌های متوالی نمی‌خوابید. دربارهٔ دستورهای ویت، باید بگوییم که او، به این دستورها نزدیک شده بود. او می‌دانست که برای معادلهٔ

$$x^۲ - (a + b)x + ab = ۰$$

دو ریشهٔ $x_۱ = a$ و $x_۲ = b$ وجود دارد، ولی نتوانست حالت کلی این دستورها را نتیجه بگیرد. دلیل این مطلب را باید در آن‌جا جست‌وجو کرد که ویت، عددهای منفی را نپذیرفته بود و، بنابراین، به ریشه‌های منفی معادله‌ها، توجهی نداشت.

مثال ۶. *در معادلهٔ درجه دوم*

$$(m + ۴)x^۲ + mx - (m + ۱) = ۰$$

مقدار m را طوری پیدا کنید که: ۱) مجموع عکس‌های دو ریشهٔ آن، برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد؛ ۲) مجموع مجذورهای دو ریشه، برابر ۵ شود.

۱) مجموع عکس‌های دو ریشهٔ معادله را، بر حسب پارامتر m، محاسبه

می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=\frac{m}{m+۱}$$

بنابراین، طبق فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{m}{m+۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow m=-۳$$

جواب را آزمایش کنید!

۲) مجموع مجذورهای دو ریشه را محاسبه می‌کنیم:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=\left(-\frac{m}{m+۴}\right)^۲+\frac{۲(m+۱)}{m+۴}=$$

$$=\frac{m^۲}{(m+۴)^۲}+\frac{۲(m+۱)}{m+۴}=\frac{۳m^۲+۱۰m+۸}{(m+۴)^۲}$$

بنابراین

$$\frac{۳m^۲+۱۰m+۸}{(m+۴)^۲}=۵\Rightarrow m^۲+۱۵m+۳۶=۰$$

از آن‌جا به دست می‌آید: $m=-۳$ و $m=-۱۲$.

$m=-۱۲$ را آزمایش می‌کنیم. این آزمایش به این دلیل لازم است که معلوم شود، آیا به ازای $m=-۱۲$، معادلهٔ ما ریشه‌های حقیقی دارد یا نه! در حالت‌هایی که به معادله‌ای با ریشه‌های موهومی برخورد کنیم، با آن که جواب درست است و دربارهٔ ریشه‌های موهومی معادله صدق می‌کند، چون

ما در مجموعهٔ عددهای حقیقی کار می‌کنیم، نمی‌توانیم آن را بپذیریم. در این‌جا، به ازای $m = -12$، معادلهٔ درجه دوم ما، چنین می‌شود:

$$8x^2 + 12x - 11 = 0$$

که، چون a و c هم علامت نیستند، دارای ریشه‌های حقیقی است:

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{31}}{4}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{31}}{4};$$

$$x_1^2 = \frac{9+31-6\sqrt{31}}{16} = \frac{40-6\sqrt{31}}{16},$$

$$x_2^2 = \frac{9+31+6\sqrt{31}}{16} = \frac{40+6\sqrt{31}}{16},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{80}{16} = 5$$

برای $m = -3$ خودتان آزمایش کنید.

مثال ۷. *اگر تفاضل دو ریشه در معادلهٔ درجه دوم*

$$mx^2 - (3m+2)x + m + 5 = 0$$

برای واحد باشد، مقدار m را پیدا کنید.

بنا بر شرط مساله، باید داشته باشیم: $x_1 - x_2 = 1$.

یک راه کلی، برای حل این گونه مساله‌ها، این است که، به یاری برابری شرط (در این‌جا $x_1 - x_2 = 1$) و برابری $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$، مقدارهای x_1 و x_2 را بر حسب m محاسبه کنیم و، سپس، با قرار دادن آن‌ها، در برابری دوم ویت، یعنی $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$، مقدار m را به دست آوریم:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{3m+2}{m} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{2m+1}{m} \\ x_2 = \frac{m+1}{m} \end{array} \right. ;$$

$$x_1x_2 = \frac{m+5}{m} \Rightarrow \frac{2m+1}{m} \cdot \frac{m+1}{m} = \frac{m+5}{m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

و به ازای $m = 1$، به معادلهٔ $x^2 - 5x + 6 = 0$ می‌رسیم که دو ریشهٔ حقیقی دارد (۲ و ۳) و تفاضل این دو ریشه برابر واحد است.

§۳. تشکیل معادلهٔ درجه دوم

معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را می‌توان، به ترتیب، این طور نوشت:

$$1)\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$
$$2)\ x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0,$$
$$3)\ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

و اگر، آن طور که معمول است، مجموع دو ریشه را با S و حاصل ضرب آنها را با P نشان دهیم ($S = x_1 + x_2$ و $P = x_1x_2$)، آن وقت، معادلهٔ درجه دوم، به این صورت درمی‌آید:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

و این، دستوری است برای تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را در اختیار داشته باشیم.

مثال ۸. *معادلهٔ درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه‌های آن برابر $-\frac{4}{7}$ و ریشهٔ دیگر آن برابر $\frac{2}{5}$ باشد.*

مجموع و حاصل ضرب دو ریشه (S و P) را به دست می‌آوریم:

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{۴}{۷} + \frac{۲}{۵} = -\frac{۶}{۳۵},$$
$$P = x_۱ x_۲ = -\frac{۴}{۷} \cdot \frac{۲}{۵} = -\frac{۸}{۳۵}$$

بنابراین، معادلهٔ مورد نظر، چنین است:

$$x^۲ + \frac{۶}{۳۵}x - \frac{۸}{۳۵} = ۰ \Rightarrow ۳۵x^۲ + ۶x - ۸ = ۰$$

مثال ۹. اگر $\frac{a+b}{a}$ و $\frac{a-b}{b}$، ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، معادله را بنویسید.

به ترتیب داریم:

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} = \frac{a^۲ + b^۲}{ab},$$
$$P = x_۱ x_۲ = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b} = \frac{a^۲ - b^۲}{ab}$$

و معادلهٔ درجه دوم مورد نظر به دست می‌آید:

$$x^۲ - \frac{a^۲ + b^۲}{ab}x + \frac{a^۲ - b^۲}{ab} = ۰ \Rightarrow abx^۲ - (a^۲ + b^۲)x + a^۲ - b^۲ = ۰$$

§۴. تجزیهٔ سه جمله‌ای درجه دوّم

سه جمله‌ای $ax^۲ + bx + c$، یک سه جمله‌ای درجه دوّم است و، همان طور که پیش از این هم گفتیم، هر زمان که از ریشه‌های این سه جمله‌ای

یاد می‌کنیم، منظور ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. این سه جمله‌ای را می‌توان این طور نوشت:

$$a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

(در سه جمله‌ای درجه دوم هم، فرض بر این است که a برابر صفر نیست).

با توجه به آن‌چه در §۱ همین بخش گفته شد:

۱) در حالت $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰$، برای سه جمله‌ای درجه دوم، به دست می‌آید:

$$ax^۲ + bx + c = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = a(x - x_۰)^۲$$

(که در آن، $x_۰$، مقدار ریشهٔ مضاعف سه‌جمله‌ای است)، یعنی، در حالتی که سه جمله‌ای دارای دو ریشهٔ برابر (یا به زبان دیگر، دارای یک ریشهٔ مضاعف) باشد، می‌توان آن را به صورت مجذور یک دو جمله‌ای نوشت.

ممکن است بپرسید، با ضریب a چه کنیم؟ در واقع، وقتی می‌گوییم، عبارتی که دارای متغیر x است، به صورت یک مجذور کامل درمی‌آید، منظور، وجود مجذور کامل نسبت به متغیر، یعنی x است، ولو این که ضریب‌ها عددهایی گنگ باشند. در این جا هم می‌توان نوشت:

$$ax^۲ + bx + c = \left(x\sqrt{a} + \frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^۲, (a > ۰);$$

$$ax^۲ + bx + c = -\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^۲, (a < ۰)$$

۲) در حالت $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$، عبارت درجه دوم به صورت

$$ax^۲ + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲}\right]$$

در می‌آید و، چون مقدار داخل کروشه، مقداری مثبت است، سه جمله‌ای درجه دوم قابل تجزیه به ضرب عامل‌های خطی نیست.

۳) در حالت $\Delta = b^2 - 4ac > 0$، سه جمله‌ای درجه دوم، به صورت

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

تجزیه می‌شود که، در آن، x_1 و x_2، ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌اند.

مثال ۱۰. *این عبارت را، به صورت ضرب دو عامل درجه اول (نسبت به x) تجزیه کنید:*

$$M = (a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab$$

عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. مبین عبارت چنین است:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2) = \\
&= a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = \\
&= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + 4a^2b^2 - 4a^3b + 4ab^3 = \\
&= (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 - 2(2ab)(a^2 - b^2) = \\
&= (a^2 - b^2 - 2ab)^2
\end{aligned}$$

و ریشه‌های سه جمله‌ای، عددهایی حقیقی‌اند:

$$x_1 = \frac{a}{a+b}, x_2 = \frac{b}{a-b}$$

و در نتیجه

$$M = (a^2 - b^2)\left(x - \frac{a}{a+b}\right)\left(x - \frac{b}{a-b}\right)$$

بهتر است ضریب $a^2 - b^2$ را به صورت $(a+b)(a-b)$ در نظر بگیریم، عامل $a+b$ را در پرانتز اول و عامل $a-b$ را در پرانتز دوم ضرب کنیم:

$$M = [(a+b)x - a][(a-b)x - b]$$

*۵§. راه حل‌های تاریخی معادلهٔ درجه دوم

پیش از این هم گفته‌ایم که، نخستین کتاب جبر را «خوارزمی» (محمد فرزند موسا) نوشت، مردی که به قول جرج سارتون، یکی از کوشندگان راه تاریخ دانش، «بزرگترین ریاضی‌دان زمان خود و، اگر همهٔ جنبه‌ها را در نظر بگیریم، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان همهٔ دوران‌ها» بود.

خوارزمی (که گاه عنوان «مجوسی» را هم به دنبال نام او می‌آورند)، از نمادهای امروزی ـ مثل $+$ (برای جمع)، $-$(برای تفریق)، $=$(برای برابری)، a (به جای عدد)، x (به جای مجهول)، ... ـ استفاده نمی‌کرد. او، مساله‌ها و راه حل‌های آن‌ها را، به صورت توصیفی و با بیان جمله‌ای می‌نوشت. عددهای منفی را نمی‌شناخت و تنها به ریشهٔ مثبت معادله توجه داشت؛ گاهی برای حل یک مساله، از شکل هندسی استفاده می‌کرد، معادله‌های درجه دوم را طوری مطرح می‌کرد که، ضریب x^2، برابر واحد و بقیهٔ ضریب‌ها مثبت باشند؛ در ضمن، برای معادله، جوابی مثبت وجود داشته باشد.

با همهٔ این‌ها، خوارزمی، نخستین گام اساسی را در پدید آوردن جبر برداشت و راه را برای پیشرفت‌های بعدیِ آن، گشود.

خوارزمی در آن‌جاها که از راه حل جبری استفاده می‌کند، خود را، بی کم و کاست، به همان دستوری می‌رساند که امروز برای حل معادلهٔ درجه دوم به کار می‌بریم و ریشهٔ مثبت معادله را به دست می‌آورد. توجه کنید، خوارزمی نزدیک به هزار و صد سال پیش می‌زیسته است. یکی از مساله‌های خوارزمی

را، که منجر به معادلهٔ درجه دوم می‌شود، به زبان امروزی می‌آوریم.

مسالهٔ خوارزمی. *یک درم را بین چند مرد تقسیم کردیم، ولی چون یک مرد به آن‌ها افزوده شد، تقسیم را دوباره، بین همهٔ مردها، انجام دادیم. معلوم شد، در تقسیم دوم، به هر مرد $\frac{۱}{۶}$ درم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز، چند مرد بوده است؟*

مسالهٔ خوارزمی به زبان امروز، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۶} \qquad (۱)$$

(x را، تعداد مردان، در آغاز کار گرفته‌ایم). خوارزمی بعد از اندکی توضیح، می‌گوید، معنای مساله این است که باید مجذور تعداد مردان به اضافهٔ تعداد آن‌ها، برابر ۶ شود؛ و این، به معنای آن است که، در برابری (۱)، مخرج‌ها را از بین ببریم که، در این صورت، به این معادله می‌رسیم:

$$x^{۲} + x = ۶$$

بعد، خوارزمی می‌گوید: ضریب x را نصف کن و، سپس، مجذور این نصف را با ۶ جمع کن

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + ۶ = \frac{۱}{۴} + ۶ = \frac{۲۵}{۴}$$

اگر ضریب x را b و مقدار ثابت را، وقتی به سمت چپ برابری آورده‌ایم، برابر c بگیریم ($b = ۱$ و $c = -۶$)، این عمل خوارزمی، به معنای

$$\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲} - c = \frac{b^{۲}}{۴} - c = \frac{b^{۲} - ۴c}{۴}$$

است. سپس، خوارزمی می‌گوید، از این عدد که به دست آورده‌ای، یعنی از $\frac{۲۵}{۴}$، جذر بگیر (خوارزمی، تنها جواب مثبت را در نظر می‌گیرد) می‌شود

$\frac{۵}{۲}$؛ یا هم ارز آن $\frac{\sqrt{b^۲ - ۴c}}{۲}$. بعد، نصف ضریب x، یعنی $\frac{۱}{۲}$ را از آن کم کن: $\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}$، یعنی ۲. این، همان تعداد مردان است. عمل آخر خوارزمی، جواب را، به زبان امروز، این طور می‌دهد:

$$-\frac{b}{۲} + \frac{\sqrt{b^۲ - ۴c}}{۲} = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴c}}{۲}$$

و این، همان دستور حل معادلهٔ درجه دوم است برای معادلهٔ

$$x^۲ + bx + c = ۰$$

می‌بینید که خوارزمی، با اندک کمبودی، با دستور حل معادلهٔ درجه دوم، آشنا بوده است.

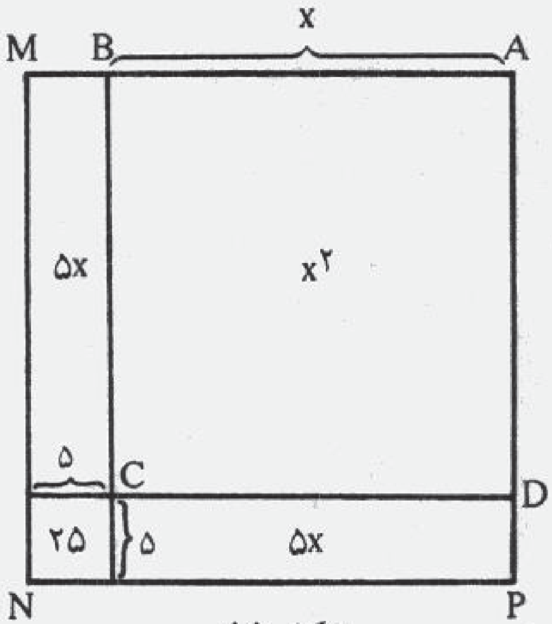
مسالهٔ دیگری از خوارزمی. خوارزمی مساله‌ای می‌آورد که به معنای حل این معادلهٔ درجه دوم است:

$$x^۲ + ۱۰x = ۳۹$$

برای حل این معادله، راه حلی را که خوارزمی با یاری گرفتن از هندسه آورده است، می‌آوریم.

فرض می‌کنیم، مساله را حل کرده‌ایم و مقدار x، برابر طول پاره‌خط راست AB شده است. بنابراین $x^۲$ برابر مساحت مربع $ABCD$ (مربع به ضلع AB) است. ضلع‌های مجاور راس C از مربع را، به اندازهٔ ۵ ادامه می‌دهیم و مربع $MNPA$ را می‌سازیم (شکل ۵۵). در این مربع، دو مستطیل، هر یک با مساحت $۵x$ و دو مربع، یکی با مساحت $x^۲$ و دیگری با مساحت ۲۵ وجود دارد. پس مساحت آن برابر است با

$$x^۲ + ۱۰x + ۲۵$$



شکل ۵۵

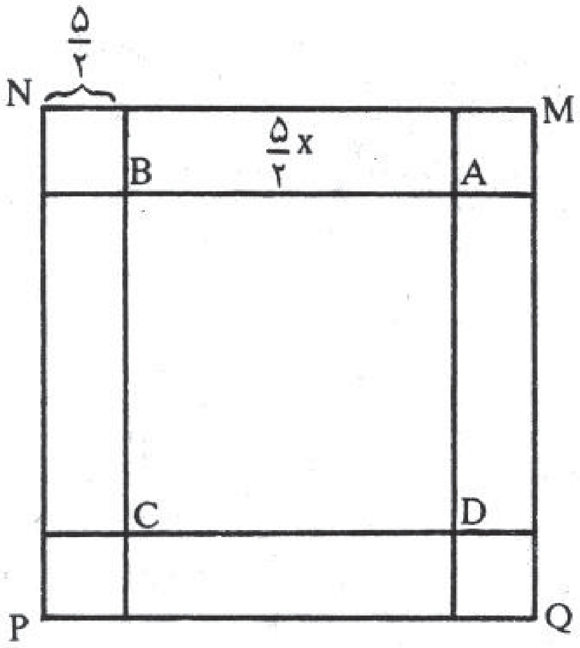
ولی ، بنا بر صورت مسأله داریم : $x^{۲} + ۱۰x = ۳۹$. درنتیجه مساحت مربع $MNPA$ برابر ۲۵ + ۳۹، یعنی ۶۴ و طول ضلع آن، برابر ۸ می‌شود: $|AM| = ۸$ و بنابراین

$$x = |AB| = ۸ - ۵ = ۳$$

خیام هم، نزدیک به سیصد سال بعد، همین مساله را، باز هم با یاری گرفتن از مساحت مربع‌ها و مستطیل‌ها حل می‌کند. راه حل خیام، با اندکی تفاوت، همان راه حل خوارزمی است.

خیام همهٔ ضلع‌های مربع $ABCD$ را (که به طول x فرض کرده است)، از سمت بیرون، به اندازهٔ $\frac{۵}{۲}$ ادامه می‌دهد و مربع $MNPQ$ را می‌سازد (شکل ۵۶). مربع $MNPQ$، شامل یک مربع مرکزی به مساحت $x^{۲}$، چهار مستطیل کناری هر یک به مساحت $\frac{۵}{۲}x$ و چهار مربع گوشه‌ای، هر یک به مساحت $\frac{۲۵}{۴}$ است؛ بنابراین مساحت کل آن، برابر

$$x^{۲} + ۴ \times \frac{۵}{۲}x + ۴ \times \frac{۲۵}{۴} = x^{۲} + ۱۰x + ۲۵$$



شکل ۵۶

می‌شود که، اگر به جای $x^{۲} + ۱۰x$، مقدارش ۳۹ را قرار دهیم، مساحت مربع $MNPQ$ برابر ۶۴ و طول ضلع آن برابر ۸ و در نتیجه، طول ضلع مربع $ABCD$، یعنی مقدار x، برابر

$$۸ - ۲ \times \frac{۵}{۲} = ۸ - ۵ = ۳$$

خواهد شد: $x = ۳$.

روش ویت برای حل معادله درجه دوم. ویت، معادلهٔ درجه دوم را، به صورت

$$x^{۲} + px + q = ۰ \qquad (۱)$$

در نظر می‌گیرد که، البته، چیزی از کلی بودن معادلهٔ درجه دوم، کم نمی‌کند، زیرا با تقسیم دو طرف معادلهٔ

$$ax^{۲} + bx + c = ۰$$

بر a (که مخالف صفر است) و با فرض

$$\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$$

همان معادلهٔ (۱) به دست می‌آید.

ویت، در آغاز فرض می‌کند:

$$x = t + u \qquad (۲)$$

و به جای x در معادله قرار می‌دهد:

$$(t+u)^{۲} + p(t+u) + q = ۰$$

که اگر آن را، بر حسب مجهول t، منظم کنیم، چنین می‌شود:

$$t^{۲} + (۲u+p)t + (u^{۲} + pu + q) = ۰ \qquad (۳)$$

اکنون اگر $u = -\frac{p}{۲}$، یعنی در واقع $x = t - \frac{p}{۲}$ در نظر گرفته شود، معادلهٔ (۳)، چنین می‌شود:

$$t^{۲} - \left(\frac{p^{۲}}{۴} - q\right) = ۰ \Rightarrow t = \frac{\sqrt{p^{۲} - ۴q}}{۲}$$

(ویت، جواب‌های منفی را به حساب نمی‌آورد). از آن‌جا

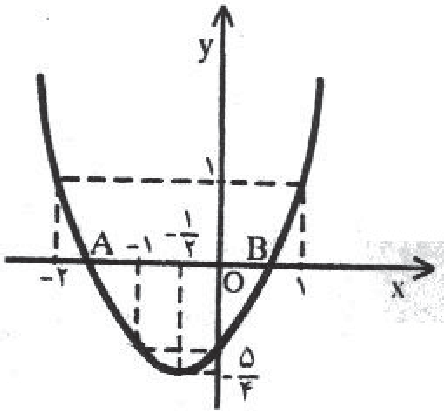
$$x = t + u = \frac{\sqrt{p^{۲} - ۴q}}{۲} - \frac{p}{۲} = \frac{-p + \sqrt{p^{۲} - ۴q}}{۲}$$

§۶. حل نموداری معادلهٔ درجه دوم

به یاری رسم نمودارها، می‌توان، به تقریب، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را به دست آورد. با مثال، روش کار را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۱. *معادلهٔ* $x^{۲} + x - ۱ = ۰$ *را به کمک رسم نمودار، حل کنید.*

x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱
y	۱	-۱	$-\frac{۵}{۴}$	-۱	۱



شکل ۵۷. جدول نمودار $y = x^۲ + x - ۱$

اگر فرض کنیم

$$y = x^۲ + x - ۱ \qquad (۱)$$

آن وقت، ریشه‌های معادلهٔ ما، طول نقطه‌های برخورد نمودار (۱) با خط راست $y = ۰$ (یعنی محور $x'x$) است. برای (۱) داریم:

$$y = \left(x^۲ + x + \frac{۱}{۴}\right) - \frac{۱}{۴} - ۱ = \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۵}{۴}$$

یعنی $y \geq -\frac{۵}{۴}$ و نمودار در نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۴}\right)$ به پایین‌ترین نقطهٔ خود می‌رسد.

جدول مقدارهای (x, y) را برای (۱) تشکیل می‌دهیم و، سپس، نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۵۷).

روی نمودار دیده می‌شود که منحنی، در نقطه‌های A و B، محور طول را قطع کرده است. عرض هر یک از این دو نقطه برابر صفر است، بنابراین،

ریشه‌های معادلهٔ ما، برابرند با طول‌های این دو نقطه:

$$x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_A \text{ و } x_۲ = x_B$$

اول به x_A می‌پردازیم. x_A، مقداری است بین ۰ و ۱

$$۰ < x_۱ < ۱$$

این مطلب، در جدول هم به روشنی دیده می‌شود. اگر $x = ۰$، آن وقت $y = -۱$؛ نقطهٔ $(۰, -۱)$ در روی نمودار، پایین $x'x$ است؛ اگر $x = ۱$، آن وقت $y = ۱$؛ نقطهٔ $(۱, ۱)$ در روی نمودار بالای $x'x$ است. نمودار برای رسیدن از نقطه $(۰, -۱)$ به نقطه $(۱, ۱)$، باید از محور $x'x$ بگذرد؛ به زبان دیگر، مقدار y، برای رسیدن از ۱ − به ۱، باید از صفر بگذرد، یعنی جایی در فاصلهٔ بین ۱ − و ۱ برابر صفر شود. و این، همان نقطهٔ A است.

با همین استدلال، می‌توانیم مقدار x_A را دقیق‌تر کنیم. در معادلهٔ (۱) داریم:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۰/۵ \\ y = -۰/۲۵ \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l} x = ۰/۶ \\ y = -۰/۰۴ \end{array} \right. , \left| \begin{array}{l} x = ۰/۷ \\ y = ۰/۱۹ \end{array} \right.$$

آن‌جا که x، از ۰/۶ به ۰/۷ می‌رود، مقدار y از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. و این، به معنای آن است که x_A، عددی بین ۰/۶ و ۰/۷ است. نخستین رقم بعد از ممیز برای $x_۱$ معلوم شد.

$$۰/۶ < x_۱ < ۰/۷ \Rightarrow x_۱ = ۰/۶\ldots$$

به همین ترتیب، می‌توان رقم دوم بعد از ممیز را برای $x_۱$ پیدا کرد. آزمایش می‌کنیم:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۰/۶ \\ y = -۰/۰۴ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۰/۶۱ \\ y = -۰/۰۱۷۹ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۰/۶۲ \\ y = ۰/۰۰۴۴ \end{array} \right.$$

یعنی

$$۰/۶۱ < x_۱ < ۰/۶۲ \Rightarrow x_۱ = ۰/۶۱\ldots$$

این روند را تا هر جا که بخواهیم، می‌توان ادامه داد و، مقدار $x_۱$ را، با هر دقتی (یعنی تا هر چند رقم دهدهی) پیدا کرد. وجود ماشین‌های حساب، می‌تواند کار محاسبه را با سرعت و دقت انجام دهد و، مقدار تقریبی ریشه را، با هر دقتی معین کند.

اگر برای x_B هم، با همین روش جلو برویم، به این نتیجه‌ها می‌رسیم

$$-۲ < x_۲ < -۱, -۱/۷ < x_۲ < -۱/۶; -۱/۶۲ < x_۲ < -۱/۶۱$$

و بنابراین $x_۲ \approx -۱/۶۱$.

یادداشت. مساله را به گونهٔ دیگری هم می‌توانستیم حل کنیم. این دو معادله را در نظر بگیرید:

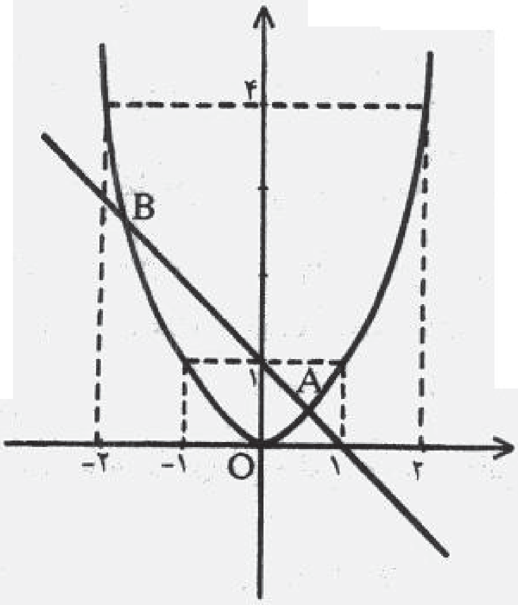
$$y = x^۲, y = -x + ۱ \qquad (۲)$$

طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای این دو معادله، همان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ = ۰$ است.

در شکل ۵۸، نمودارهای (۲) داده شده‌اند که در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع می‌کنند و، روی شکل دیده می‌شود که

$$۰ < x_A < ۱ \text{ و } -۲ < x_B < -۱$$

برای دقیق‌تر کردن مقدار ریشه‌ها، می‌توان شبیه حالت قبل، با اندکی تفاوت در استدلال، عمل کرد.



شکل ۵۸

تمرین‌ها

۱۹۲. ثابت کنید عبارت $-۰/۵x^{۲} + ۲x - ۳/۵$، به ازای هر مقداری از x، برابر یک مقدار منفی می‌شود.

۱۹۳. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ x^{۲} - ۵x + ۶ = ۰; \quad ۲)\ ۳x^{۲} + ۱۴x - ۵ = ۰;$$

$$۳)\ ۲x^{۲} - ۸x + ۲ = x^{۲} - ۱۰;$$

$$۴)\ x^{۲} - ۲x + ۱ = ۶x^{۲} + x - ۱$$

۱۹۴. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۳}{x} + \frac{۲}{x - ۱} = ۲; \qquad ۲)\ \frac{x + ۱}{x - ۱} + \frac{x + ۳}{x + ۴} - \frac{۵}{۶} = ۰;$$

$$۳)\ \frac{۲x + ۱}{x} - \frac{۲x}{۲x - ۱} = ۳; \quad ۴)\ \frac{x + \frac{۱}{۲}}{a} + \frac{۲a - ۱}{۲x} = ۲$$

۱۹۵. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $(x^{۲}-۵x+۲)^{۲}-۴(x^{۲}-۵x+۲)=۳۲;$

۲) $x^{۴}+۲۵=۲۶x^{۲};$

۳) $(x+۱)^{۴}+۳۶=۱۳(x+۱)^{۲};$

۴) $(x-۵)^{۴}+۴=۵(x-۵)^{۲};$

*۵) $(x+۱)^{۴}+(x-۱)^{۴}=۸;$

۶) $(x+۱)^{۳}-(x-۲)^{۳}=۶۳$

*۱۹۶. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $x(x+۱)(x+۲)(x+۳)=۲۴;$

۲) $(x+۲)^{۴}+(x+۵)^{۴}=۱۷;$

۳) $(x^{۲}+۳x+۳)(x^{۲}+۳x-۵)+۷=۰;$

۴) $x^{۳}+a^{۳}+b^{۳}=(x+a+b)^{۳};$

۵) $(x-۲)(x+۱)(x+۶)(x+۹)+۱۰۸=۰$

۱۹۷. هر یک از این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $x^{۲}-۱۳۷۵x+۱۳۷۴=۰;$

۲) $۱۳۷۵x^{۲}-۱۳۷۴x-۱=۰$

۳) $۵۳x^{۲}-۴۷x-۶=۰$

۴) $(x^{۲}+۳x-۱)^{۲}=x^{۲}+۳x+۱$

۵) $\frac{۲}{۱+x+x^{۲}}=۳-x-x^{۲}$

۱۹۸. این معادلهٔ پارامتری درجه دوم داده شده است:

$$(m+۱)x^۲-(۲m-۱)x+m-۱=۰$$

به ازای چه مقداری از m:

۱) یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۱− می‌شود،

۲) یکی از ریشه‌های معادله، برابر $-\frac{۳}{۵}$ است؛

۳) یکی از ریشه‌های معادله، برابر صفر است؛

۴) معادله دارای دو ریشهٔ قرینهٔ یکدیگر است؛

۵) معادله دارای دو ریشهٔ عکس یکدیگر است؛

۶) معادله دارای دو ریشهٔ برابر است؛

در هر حالت، ریشه‌های معادله را پیدا کنید.

۱۹۹. ۱) α و β، دو ریشهٔ معادلهٔ $x^۲-۸x+۱۵=۰$ هستند. بدون این که معادله را حل کنید، مقدار عبارت زیر را پیدا کنید:

$$A=\frac{۷\alpha^۲-۵\alpha\beta+۷\beta^۲}{\alpha^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲+\beta^۳}$$

۲) بدون حل معادله $x^۲-۹x+۲۰=۰$، مجموع توان‌های سوم و مجموع توان‌های چهارم ریشه‌های آن را پیدا کنید.

*۲۰۰. در معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$، مقدارهای a و b را طوری پیدا کنید که، ریشه‌های معادله، برابر a و b باشند.

۲۰۱. معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که:

۱) دو ریشهٔ آن، برابر ۳− و $\frac{۱}{۷}$ باشند؛

۲) دو ریشهٔ آن، برابر $a+b$ و $a-b$ باشند؛

۳) ریشه‌هایی برابر $۱+\frac{۱}{a}$ و $۱-\frac{۱}{a}$ داشته باشد.

۲۰۲. در معادلهٔ درجه دوم

$$x^{۲} - (m - ۳)x + m - ۲ = ۰ \qquad (۱)$$

مقدار پارامتر m را طوری پیدا کنید که:

۱) معادله دارای دو ریشهٔ برابر باشد؛

۲) مجموع مجذورهای دو ریشهٔ معادله، برابر ۱۳ شود؛

۳) مجموع عکس‌های دو ریشه، برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد؛

۴) یکی از ریشه‌های معادله، یک واحد از ریشهٔ دیگر آن، بیشتر باشد؛

۵) مجموع یک ریشه با دو برابر ریشهٔ دیگر، برابر ۷ شود؛

۶) یکی از ریشه‌های آن، برابر m باشد.

*۲۰۳. معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که:

۱) ریشه‌های آن سه برابر ریشه‌های معادله $۹x^{۲} - ۹x - ۱۰ = ۰$ باشند؛

۲) ریشه‌های آن، m برابر ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ باشند؛

۳) ریشه‌های آن، یک واحد از ریشه‌های معادله $x^{۲} - x + a = ۰$ بیشتر باشند.

۲۰۴. این عبارت‌ها را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$۱)\ ۲x^{۲} - ۲۴x + ۷۰ \qquad ۲)\ x^{۲} - ۲ax + a^{۲} - b^{۲};$$

$$۳)\ nx^{۲} - m(n^{۲} + ۱)x + m^{۲}n;$$

$$۴)\ (a^{۲} + a)^{۲} + ۴(a^{۲} + a) - ۱۲$$

$$*۵)\ (x^{۲} + x + ۴)^{۲} + ۸x(x^{۲} + x + ۴) + ۱۵x^{۲}$$

*۲۰۵. m را طوری پیدا کنید که، دو معادلهٔ زیر، دارای یک ریشهٔ

مشترک باشند:

$$x^۲ - ۶x + m + ۷ = ۰ \text{ و } x^۲ - ۳x + ۲m + ۶ = ۰$$

۲۰۶. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ (p, q) در صفحه، به شرطی که بدانیم، معادلهٔ $x^۲ - ۲px + q = ۰$ دارای دو ریشهٔ $x_۱$ و $x_۲$ است، به نحوی که $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۲$.

***۲۰۷.** به ازای چه مقداری از a، هر دو ریشهٔ معادلهٔ

$$ax^۲ - ۳x - a - ۳ = ۰$$

عددهایی درست‌اند؟

۲۰۸. به ازای چه مقدار m، مجموع مجذورهای دو ریشهٔ معادلهٔ

$$x^۲ - (۲m + ۳)x + m - ۱ = ۰$$

به کمترین مقدار ممکن می‌رسد؟

***۲۰۹.** در معادلهٔ درجه دوم

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$

عددهای a و b و c، یک رقمی و غیر منفی‌اند. $\overline{abc}$، عددی اول است. ثابت کنید، این معادله نمی‌تواند ریشهٔ گویا داشته باشد.

***۲۱۰.** ثابت کنید، نمی‌توان یک چند ضلعی محدب پیدا کرد که درست، ۱۳۷۵ قطر داشته باشد.

***۲۱۱.** عددهای طبیعی a و b چنان‌اند که مجموع

$$\frac{a^۲ - ۱}{b + ۱} + \frac{b^۲ - ۱}{a + ۱}$$

عددی درست است. ثابت کنید، هر یک از این دو کسر، عددی درست است.

*۲۱۲. این معادله را حل کنید:

$$x = 1 - 6(1 - 6x^2)^2$$

۲۲۳. α و β، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2 - kx - k = 0$ هستند. ثابت کنید: $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^3\beta^3 \geq 0$.

*۲۲۴. می‌دانیم عددهای a، b و $\sqrt{a} + \sqrt{b}$، گویا هستند. ثابت کنید، $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ هم، عددهایی گویا هستند.

۲۲۵. ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ را α و β می‌نامیم. مطلوب است محاسبهٔ $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$.

*۲۲۶. این معادله را حل کنید.

$$x^4 + 2x^3 - x - a = 0$$

*۲۲۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x = y^3 - 3y \\ y = 3x - x^3 \end{cases}$$

۵. نابرابری و نامعادله

§۱. نابرابری

نابرابری، برای نشان دادن رابطهٔ بین دو عدد یا دو مقداری است که با هم برابر نباشند. نابرابری را، نامساوی هم می‌گویند.

ساده‌ترین نماد، برای نشان دادنِ نابرابری دو مقدار، نماد $\neq$ است. وقتی می‌نویسیم $a \neq b$، به معنای آن است که «a با b برابر نیست». به عنوان مثال، می‌توان نوشت:

$$۵ \neq -۲, a^۲ + ۱ \neq a^۲ - ۴,$$

نماد $\neq$، مشخص نمی‌کند، کدام یک از دو مقدار، کوچکتر است. برای این که کوچکتر بودن -۲ از ۵ را نشان دهند، از نماد $<$ استفاده می‌کنند:

$$-۲ < ۵, a^۲ - ۳ < a^۲ + ۱$$

اگر نماد $<$ را، در جهت عکس خود در نظر بگیریم، معنای «بزرگتر» را می‌دهد:

$$۵ > ۲, a^۲ + ۱ > a^۲ - ۱$$

گاهی، برای مشخص کردن ردیف عددها یا مقدارها، به ترتیب از «کم» به «زیاد» (یا به زبان ریاضی، به ردیف صعودی)، از چند بار نماد $<$ استفاده می‌کنند. وقتی بنویسیم:

$$a < b < c$$

یعنی، در بین سه عدد یا سه مقدار a، b و c، عدد یا مقدار a از همه کوچکتر و عدد یا مقدار c از همه بزرگتر است که آن را، به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$c > b > a$$

در این شکل نوشتن، عددها یا مقدارها را، از زیاد به کم (به زبان ریاضی، به ردیف *نزولی*) نوشته‌ایم.

□

می‌خواهید یک دفترچهٔ ۲۰۰ برگ بخرید. بهای دفترچه ۴۵۰ تومان است و شما، a تومان دارد. a چقدر باشد تا بتوانید دفترچهٔ مورد نیاز خود را بخرید؟

روشن است، اگر a، از ۴۵۰ تومان کمتر باشد، نمی‌توانید به فکر خرید دفترچه بیفتید. a باید، دست کم، ۴۵۰ تومان باشد. البته، اگر a، بیشتر از بهای دفترچه باشد، مشکلی برای شما پیش نمی‌آید. بنابراین، باید a، بیشتر یا برابر ۴۵۰ باشد (یا ساده‌تر، a از ۴۵۰ کمتر نباشد). این مطلب را، این طور می‌نویسند:

$$a \geq ۴۵۰$$

و می‌خوانند: a بزرگتر یا برابر ۴۵۰.

نمادهای $\leq$ و $\geq$ هم، نمادهای نابرابری هستند. به این ترتیب، پنج نماد، برای نشان دادن نابرابری دو عدد یا دو مقدار وجود دارد:

۱) $\neq$، نماد «برابر نیست» یا «مخالف است»؛

۲) $<$، نماد «کوچکتر است»؛

۳) $>$، نماد «بزرگتر است»؛

۴) $\leq$، نماد «کوچکتر یا برابر است»، یا «بزرگتر نیست»؛

۵) $\geq$، نماد «بزرگتر یا برابر است»، یا «کوچکتر نیست».

*نمادهای $<$ و $>$ را، برای نخستین بار، برای **توماس هاریوت**، ریاضی‌دان انگلیسی (۱۵۶۰_۱۶۲۱ میلادی) در کتاب خود به نام «هنر تحلیل کردن» به کار برد. این کتاب در سال ۱۶۳۱ میلادی (ده سال بعد از مرگ نویسندهٔ آن) چاپ شد و، از همان زمان، در ادب ریاضی معمول شد.

§۲. ویژگی‌های نابرابری

از این به بعد، هر جا از نابرابری صحبت کنیم، منظورمان چهار حالت آخر نابرابری (یعنی $<$ یا $>$ یا $\leq$ یا $\geq$) است.

نابرابری، در بسیاری از ویژگی‌های خود، شبیه برابری است:

۱) به دو طرف یک نابرابری، می‌توان عددی اضافه کرد، یا از دو طرف آن عددی کم کرد:

اگر $a < b$، آن وقت $a + c < b + c$ یا $a - c < b - c$؛

۲) دو طرف نابرابری را می‌توان در عددی مثبت ضرب و یا بر عددی مثبت تقسیم کرد:

اگر $a < b$ و $c > 0$، آن وقت $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$؛

۳) ولی اگر دو طرف نابرابری را در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نابرابری تغییر می‌کند:

اگر $a < b$ و $c < 0$، آن وقت $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. مثلاً اگر دو طرف نابرابری $-\frac{3}{4} < 1$ را در -4 ضرب کنیم، به صورت نابرابری

$-۴ < ۳$ درمی‌آید؛

۴) دو طرف نابرابری را نمی‌توان در صفر ضرب یا بر صفر تقسیم کرد؛

۵) اگر $a < b$ و $c < d$، آن وقت $a + c < b + d$؛ یعنی اگر دو نابرابری هم جهت باشند، می‌توان آن‌ها را، جمله به جمله با هم جمع کرد؛

۶) اگر a، b، c و d عددهایی مثبت باشند و، در ضمن $a < b$ و $c < d$، آن وقت $ac < bd$؛

۷) دو طرف نابرابری را می‌توان مکعب کرد (به توان ۳ رساند)، یا از دو طرف برابری کعب (یعنی ریشهٔ سوم) گرفت.

اگر $a < b$، آن وقت $a^۳ < b^۳$ و $\sqrt[۳]{a} < \sqrt[۳]{b}$؛

۸) اگر a و b، مقدارهایی مثبت باشند و، در ضمن $a < b$، آن وقت $a^۲ < b^۲$ و $\sqrt{a} < \sqrt{b}$، یعنی به شرطی می‌توان دو طرف نابرابری را مجذور کرد یا از دو طرف نابرابری ریشهٔ دوم گرفت که، مقدارهای هر دو طرف نابرابری، مثبت باشند.

۹) روشن است که، اگر عددی یا جمله‌ای را از یک طرف نابرابری به طرف دیگر ببریم، علامت آن عوض می‌شود:

اگر $a - ۱ < b + ۲$، آن وقت $a < b + ۲ + ۱$ یا $a < b + ۳$، یا $a - b < ۳$.

با استفاده از همین ویژگی‌های نابرابری، می‌توان مساله‌های مربوط به آن را حل کرد.

مثال ۱. می‌دانیم $a \neq b$. آیا $a^۲ \neq b^۲$.

روشن است، اگر $|a| \neq |b|$، آن وقت $a^۲ \neq b^۲$، ولی اگر a و b با علامت‌های مختلف باشند، ولی قدر مطلقی برابر داشته باشند، آن وقت از نابرابری $a \neq b$ نتیجه می‌شود $a^۲ = b^۲$؛ از $۴ \neq -۴$، به دست می‌آید: $۱۶ = ۱۶$.

مثال ۲. می‌دانیم $\frac{۱}{a} < \frac{۳}{۲a}$ ، a چه عددهایی می‌تواند باشد؟

a عددی مثبت است، زیرا اگر a عددی منفی باشد، با ضرب دو طرف نابرابری در عدد منفی a، جهت نابرابری عوض می‌شود و به صورت $۱ > \frac{۳}{۲}$ درمی‌آید که نادرست است؛ ولی به شرط $a > ۰$ می‌توان دو طرف را در عدد مثبت a ضرب کرد، بدون این که جهت نابرابری عوض شود و به نابرابری درست $۱ < \frac{۳}{۲}$ می‌رسیم.

مثال ۳. می‌دانیم $\frac{x+۱}{x-۱} < \frac{۳}{x-۱}$. x چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x > ۱$. در این حالت $x - ۱$، مقداری مثبت است و می‌توانیم دو طرف نابرابری را در $x - ۱$ ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x + ۱ < ۳ \Rightarrow x < ۲$$

که اگر شرط این حالت، یعنی $x > ۱$ را در نظر بگیریم، به این جواب می‌رسیم:

$$۱ < x < ۲$$

حالت دوم $x < ۱$. در این حالت $x - ۱$، مقداری منفی است و، وقتی دو طرف نابرابری را در $x - ۱$ ضرب کنیم، جهت نابرابری عوض می‌شود:

$$x + ۱ > ۳ \Rightarrow x > ۲$$

و این، با شرط این حالت، یعنی $x < ۱$ سازگار نیست.

به این ترتیب، جواب مساله، همان $۱ < x < ۲$ است. یعنی x می‌تواند هر عددی بین ۱ و ۲ باشد.

§۳. نابرابری‌های اتحادی

یک نابرابری را، اتحادی گویند، وقتی که، همیشه برقرار باشد. نابرابری $۷ > ۳$، یک نابرابری اتحادی است. یا نابرابری

$$a^{۲} + b^{۲} \geq ۲ab$$

یک نابرابری اتحادی و، به ازای هر مقدار دلخواه a و b، برقرار است، زیرا، می‌توان آن را، به این صورت تبدیل کرد:

$$a^{۲} + b^{۲} - ۲ab \geq ۰ \Rightarrow (a-b)^{۲} \geq ۰$$

که درستی آن روشن است: اگر $a = b$، آن‌گاه $(a-b)^{۲} = ۰$ و اگر $a \neq b$، آن‌گاه $(a-b)^{۲} > ۰$.

مثال ۴. a و b عددهایی هم علامت‌اند (یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی). ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$$

چون a و b هم علامت‌اند مقدار ab عددی مثبت می‌شود و، می‌توان دو طرف نابرابری را در ab ضرب کرد؛ در این صورت به دست می‌آید:

$$a^{۲} + b^{۲} \geq ۲ab$$

که درستی آن را، هم‌اکنون ثابت کردیم.

مثال ۵. ثابت کنید، به شرط $x \geq ۱$ داریم:

$$۲\sqrt{x} > \sqrt{x+۱} + \sqrt{x-۱} \qquad (۱)$$

در این‌جا، با یک نابرابری اتحادی شرطی سروکار داریم. نابرابری (۱)، به شرطی معنا دارد که داشته باشیم $x \geq ۱$ (اگر داشته باشیم $x < ۱$، با

عددهای موهومی رو به رو می‌شویم). چون دو طرف نابرابری، عددهای مثبت‌اند، می‌توانیم آن‌ها را مجذور کنیم:

$$۴x > (x + ۱) + ۲\sqrt{x^۲ - ۱} + (x - ۱)$$

و یا $\sqrt{x^۲ - ۱} < x$. دو طرف این نابرابری هم، عددهایی مثبت‌اند؛ دوباره دو طرف را مجذور می‌کنیم:

$$x^۲ > x^۲ - ۱ \Rightarrow ۰ > -۱$$

به یک نابرابری روشن رسیدیم، یعنی نابرابری (۱)، برای هر $x > ۱$، درست است. مثلاً، به ازای $x = ۱۰۰۰$، این نابرابری چنین می‌شود:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰} > \sqrt{۱۰۰۱} + \sqrt{۹۹۹}$$

§۴. نامعادله

نامعادله، یک نابرابری شامل مجهول است که باید شرط درستی آن را پیدا کنیم.

مثال ۶. با چه شرطی، این نابرابری درست است:

$$x(x + ۵) + ۲ < x(x - ۱) - ۴ \qquad (*)$$

اگر ضرب‌ها را انجام دهیم، به ترتیب داریم:

$$x^۲ + ۵x + ۲ < x^۲ - x - ۴ \Rightarrow ۵x + x < -۴ - ۲ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۶x < -۶ \Rightarrow x < -۱$$

یعنی باید مقدار x، از ۱− کوچکتر باشد تا برابری $(*)$، به یک نابرابری اتحادی تبدیل شود: نابرابری $(*)$، به ازای همهٔ مقدارهای $x < -۱$ برقرار

است؛ نابرابری $(*)$، یک نابرابری اتحادی شرطی است؛ شرط آن، این است که داشته باشیم: $x > -1$.

وقتی در یک نابرابری شامل مجهول، بخواهیم شرطی را پیدا کنیم که نابرابری، به‌ازای آن شرط، برقرار باشد، گویند *با* یک **نامعادله** سروکار داریم و، *شرط درستی آن را،* **مجموعهٔ جواب نامعادله** *می‌نامند.* $x > -1$، مجموعهٔ جواب، برای نامعادلهٔ $(*)$ است.

مثال ۷. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{x-1}{x+1} > 2 \qquad (1)$$

حل نامعادله، یعنی پیدا کردن شرط درستی آن، یعنی پیدا کردن مجموعهٔ جواب برای آن.

بهترین و عمومی ترین راه، برای پیدا کردن مجموعهٔ جواب در یک نامعادله این است که: ۱) همهٔ جمله‌ها و عبارت‌ها را به یک سمت نماد نابرابری ببریم (یعنی، یک طرف نماد نابرابری، برابر صفر شود)؛ ۲) عمل‌های لازم را انجام دهیم تا به ساده‌ترین صورت خود درآید؛ ۳) به عبارتی می‌رسیم که باید علامت آن را تعیین کنیم (یعنی روشن کنیم، به ازای چه مقدارهایی از مجهول مثبت و، به ازای چه مقدارهایی از مجهول، منفی است).

به این ترتیب، دربارهٔ نامعادلهٔ (۱)، به ترتیب، داریم:

$$\frac{x-1}{x+1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{(x-1) - 2(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-x-3}{x+1} > 0$$

می‌خواهیم کسری مثبت باشد. در دو حالت ممکن است، حاصل یک کسر، مثبت شود.

حالت اول. صورت و مخرج کسر هر دو مثبت باشند:

$$\begin{cases} -x-۳>۰ \\ x+۱>۰ \end{cases} = \begin{cases} -x>۳ \\ x>-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-۳ \\ x>-۱ \end{cases}$$

و این، ممکن نیست: x نمی‌تواند، در عین حال، از ۳− کوچکتر و از ۱− بزرگتر باشد: صورت و مخرج کسر نمی‌توانند با هم مثبت باشند.

حالت دوم. صورت و مخرج کسر با هم منفی باشند:

$$\begin{cases} -x-۳<۰ \\ x+۱<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x<۳ \\ x<-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-۳ \\ x<-۱ \end{cases}$$

و این، ممکن است؛ x باید عددی بین ۳− و ۱− باشد:

$$-۳<x<-۱$$

مجموعهٔ جواب به دست آمد. اگر x از ۳− بزرگتر و از ۱− کوچکتر باشد، نابرابری (۱) برقرار است.

***مثال ۸.** آیا عددهای x و y و z وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{y-۱}+\sqrt{z-۱}>\sqrt{z(xy+۱)} \qquad (۱)$$

در آغاز ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{y-۱}\leq\sqrt{xy} \qquad (۲)$$

$a=x-۱$ و $b=y-۱$ می‌گیریم، باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{(a+۱)(b+۱)}$$

با مجذور کردن دو طرف نابرابری، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$ab - ۲\sqrt{ab} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow (\sqrt{ab} - ۱)^۲ \geq ۰$$

که درستی آن روشن است (علامت برابری، برای وقتی است که داشته باشیم $\sqrt{ab} = ۱$).

بنابراین، نابرابری (۲)، با شرط‌های $۱ \leq x$ و $۱ \leq y$، همیشه برقرار است؛ در حالت

$$\sqrt{(x-۱)(y-۱)} = ۱ \Rightarrow xy = x + y$$

علامت برابری و، در غیر این صورت، علامت نابرابری، برقرار است.

با توجه به نابرابری (۲)، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{x-۱} + \sqrt{y-۱} \leq \sqrt{xy},$$
$$\sqrt{xy} + \sqrt{z-۱} \leq \sqrt{z(xy+۱)}$$

بنابراین

$$(\sqrt{x-۱} + \sqrt{y-۱}) + \sqrt{z-۱} \leq \sqrt{xy} + \sqrt{z-۱} \leq$$
$$\leq \sqrt{z(xy+۱)}$$

در نتیجه، نابرابری مساله، هرگز برقرار نیست.

تمرین‌ها

۲۲۸. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $۲\sqrt{۵۰} > \sqrt{۴۹} + \sqrt{۵۱}$؛

۲) $\sqrt{۱۰۱} + \sqrt{۱۰۲} > ۱۰ + \sqrt{۱۰۳}$؛

*۳) $\sqrt[3]{۱۰۱} + \sqrt[3]{۹۹} < ۲\sqrt[3]{۱۰۰}$

*۴) $۳۳^{۱۳} > ۶۳^{۱۱}$

*۵) $\sqrt[3]{x+۲} + \sqrt[3]{x-۱} < \sqrt[3]{x+۱} + \sqrt[3]{x}$

۶) $\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}} \geq ۲$

*۲۲۹. درستی این نابرابری را ثابت کنید (برای عددهای مثبت a، b و c):

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[3]{abc}$$

۲۳۰. کدام بزرگترند:

۱) x یا $\frac{۱}{x}$؛ ۲) x یا $x^۲$؛ ۳) a یا $-a$؟

۲۳۱. ۱) می‌دانیم $a^۲ \neq b^۲$. آیا $a \neq b$؟ ۲) می‌دانیم $a < b$. آیا $a^۲ < b^۲$؟

۲۳۲. a و b و c، عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq ۸$$

۲۳۳. به شرط $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$، ثابت کنید:

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x$$

*۲۳۴. به شرط مثبت بودن a و b و c ثابت کنید:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

۲۳۵. m را طوری پیدا کنید که، نابرابری زیر، به ازای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد:

$$x^۲ - ۲mx + ۴m - ۳ \geq ۰$$

*۲۳۶. با شرط مثبت بودن a و b و c، ثابت کنید:

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\geq ۹$$

*۲۳۷. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$a^۴+b^۴+c^۴+d^۴\geq ۴abcd$$

۲۳۸. با شرط $\frac{\pi}{۲}>x>۰$ ثابت کنید:

$$\sin x+\cos x\leq\sqrt{۲}$$

۲۳۹. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $۳x+۲<۵x+۶$;
۲) $x>۳x+۵$;
۳) $(x+۲)(۲x+۱)<(۲x-۳)(x-۵)$;
۴) $x^۲-۴x\leq ۰$
۵) $۲x^۲+۷x\geq ۹$;
۶) $۱۱-۷x-۴x^۲\geq ۰$
۷) $\frac{x}{x+۲}<۱$;
۸) $۵<\frac{۲x-۱}{۲x+۱}$;
۹) $\frac{x}{x+۱}<\frac{x-۱}{x}$

*۲۴۰. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $-۲<۲x+۱<۲$;
۲) $-۱<۲x+۳<۷$;
۳) $\frac{۱}{۳}<۷x+۱<\frac{۵}{۳}$

*۲۴۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، می‌دانیم زاویهٔ راس A (بین دو ساق)، برابر ۲۰ درجه است. ثابت کنید، طول ساق از دو برابر قاعده بزرگتر و از سه برابر قاعده کوچکتر است.

۶. حل مساله‌های حساب به یاری جبر

کاتب خوارزمی، که کمتر از دویست سال، بعد از هم‌شهری خود، محمد خوارزمی مشهور به مجوسی، بنیان‌گذار جبر می‌زیست، در کتاب خود به نام «مفاتیح‌العلوم» می‌نویسد: «... جبر، صنعتی است از صناعات حساب. این دانش وسیلهٔ نیکویی است، برای به دست آوردن پاسخ درست در مساله‌های دشوار ...».

خود محمد خوارزمی در مقدمهٔ کتاب «جبر» نوشته است: «... برای روشن کردن مساله‌های مبهم و آسان کردن دشواری‌های دانش به پا خاستم و کتابی در تعریف حسابِ جبر نوشتم، کتابی که، با همهٔ مختصر بودن خود شامل موضوع‌های دقیق و مهم «دانش حساب»، که همگان به آن نیازمندند، باشد».

جبر در جریان تکامل حساب پدید آمد و «جهشی» در آن ایجاد کرد. به ویژه، جبر، به صورتی که امروز با آن کار می‌کنیم، با به کار گرفتن حرف‌ها (به جای عددها و مجهول‌ها) و نمادها (مثل $+$، $-$، $=$، $>$، $\sqrt{}$ و غیره)، نسبت به حساب برتری‌هایی دارد:

اول. اگر در حساب، با حالت‌های خاص و عددهای خاص سروکار داریم، در جبر، با حالت‌های کلی و، عدد به مفهوم عام خود، کار می‌کنیم.

در حساب می‌گوییم ۷ × ۴ با ۴ × ۷ یکی است، در حالی که در جبر، از حالت کلیِ این ویژگی ضرب سخن می‌رانیم و می‌گوییم $a \times b = b \times a$.

دوم. در حساب با عددهای مثبت (و در مرحله‌های نخستین، عددهای گو یا) کار می‌کنیم، در حالی که در جبر، مفهومی کلی‌تر برای عدد پدید می‌آید و، عددهای منفی و موهومی و غیر آن وارد عمل می‌شوند.

سوم. از آن‌جا که در جبر، با توجه به قانون‌های حاکم بر عمل‌ها، بدون دخالت اندیشه، خود را به پاسخ می‌رسانیم. در بسیاری موردها، نتیجه‌هایی به دست می‌آوریم که، پیش‌بینی آن در حساب، برایمان چندان ساده نبود. به این مساله توجه کنید:

مثال ۱. *پدری در ۲۰ سالگی پسرش، ۴۸ سال دارد. سن پدر، در چند سالگی پسر، پنج برابر سن پسر است؟*

فرض می‌کنیم، بعد از x سال دیگر، سن پدر، پنج برابر سن پسر خود باشد. بعد از x سال، پدر $(۴۸ + x)$ سال و پسر $(۲۰ + x)$ سال دارد. ولی می‌خواهیم سن پدر، پنج برابر سن پسر باشد، یعنی

$$۴۸ + x = ۵(۲۰ + x) \Rightarrow ۴x = -۵۲ \Rightarrow x = -۱۳$$

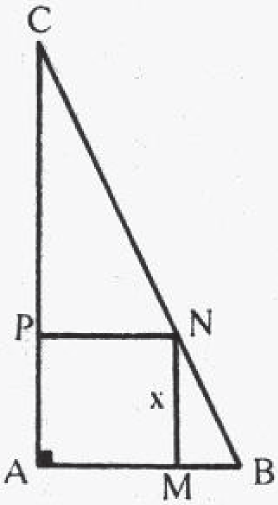
جواب منفی، چه معنایی دارد؟

۱۳− سال دیگر، سن پدر، پنج برابر سن پسر می‌شود.

عدد منفی، یعنی عدد کمتر از صفر، ریاضی‌دانان ایرانی (و همچنین هندی)، وقتی می‌خواستند از عددی منفی استفاده کنند (که البته، به ندرت پیش می‌آمد)، آن را «وام» می‌نامیدند (در برابر «دارائی» برای عدد مثبت). بنابراین، ۱۳− سال دیگر، یعنی ۱۳ سال پیش، ۱۳ سال پیش سن این پدر و پسر، چنین بوده است:

$$\text{سن پدر در ۱۳ سال پیش} = ۴۸ - ۱۳ = ۳۵;$$

$$\text{سن پسر در ۱۳ سال پیش} = ۲۰ - ۱۳ = ۷$$



شکل ۵۹

و می‌بینیم، سن پدر پنج برابر سن پسر است.

در هندسه هم، مساله‌هایی را که به نحوی با محاسبه سروکار دارند، می‌توان به یاری جبر حل کرد. نمونه‌ای می‌آوریم.

مثال ۲. *در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ یک مربع طوری محاط کنید که، دو ضلع آن روی ضلع‌های AB و AC و یک راس آن، روی وتر مثلث باشد؛ به شرطی که $|AB| = ۳$ و $|AC| = ۶$.*

راه حل اول. روش عادی جبری. به شکل ۵۹ توجه کنید. فرض می‌کنیم، مربع $AMNP$ را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط کرده باشیم. طول ضلع مربع، مجهول است. آن را x می‌گیریم. بنابراین

$$|MB| = ۳ - x|, |PC| = ۶ - x$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBN، بنابر قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$|BN|^۲ = x^۲ + (۳ - x)^۲ = ۲x^۲ - ۶x + ۹$$

و در مثلث قائم‌الزاویه PNG:

$$|NC|^۲ = x^۲ + (۶ - x)^۲ = ۲x^۲ - ۱۲x + ۳۶$$

از طرف دیگر، برای وتر مثلث ABC به دست می‌آید:

$$|BC|^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ = ۴۵ \Rightarrow |BC| = ۳\sqrt{۵}$$

ولی باید، مجموع طول‌های دو پاره‌خط راست BN و NC، برابر با طول پاره‌خط راست BC باشد:

$$|BN| + |NC| = |BC| \qquad (*)$$

مقدارهایی را که برای طول این پاره‌خط‌های راست پیدا کرده‌ایم، به جای آن‌ها، در برابری $(*)$ قرار می‌دهیم. به این معادله، با مجهول x، می‌رسیم:

$$\sqrt{۲x^۲ - ۶x + ۹} + \sqrt{۲x^۲ - ۱۲x + ۳۶} = ۳\sqrt{۵} \qquad (**)$$

اگر بتوانیم این معادله را حل کنیم، ریشهٔ آن، یعنی مقدار x، طول ضلع مربع مجهول خواهد بود. اگر دو طرف معادلهٔ $(**)$ را مجذور کنیم، بعد از ساده کردن، به این نتیجه می‌رسیم:

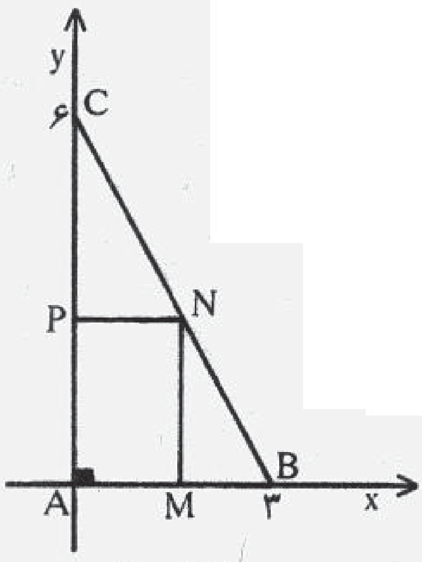
$$\sqrt{(۲x^۲ - ۶x + ۹)(۲x^۲ - ۱۲x + ۳۶)} = ۹x - ۲x^۲$$

که اگر دوباره، دو طرف معادلهٔ اخیر را مجذور کنیم، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$(x - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

طول ضلع مربع محاطی برابر ۲ است و، بنابراین، به سادگی می‌توان مربع را رسم کرد.

راه حل دوم. به یاری هندسهٔ تحلیلی. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که راس A بر مبداء مختصات، ضلع AB بر جهت مثبت محور $x'x$ و ضلع AC بر جهت مثبت محور $y'y$ منطبق باشد (شکل ۶۰).



شکل ۶۰:

مختصات راس‌های مثلث چنین‌اند:

$$A(۰,۰), B(۳,۰), C(۰,۶)$$

بنابراین، می‌توان معادلهٔ خط راست BC را پیدا کرد:

$$\frac{y-۰}{x-۳}=\frac{۰-۶}{۳-۰} \Rightarrow ۲x+y-۶=۰$$

برای یافتن مربع، باید نقطهٔ N را روی وتر BC طوری پیدا کرد که طول و عرضی برابر داشته باشد؛ یعنی نقطهٔ N، محل برخورد وتر BC با نیمساز ربع اول (به معادلهٔ $x-y=۰$) است. با حل دستگاه زیر (شامل معادلهٔ خط راست BC و نیمساز ربع اول)، مختصات نقطهٔ N به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x+y-۶=۰ \\ x-y=۰ \end{cases} \Rightarrow N \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۲ \end{array} \right.$$

یعنی، مربع محاطی، ضلعی به طول ۲ دارد.

راه حل سوم. به یاری مثلثات. اگر طول ضلع مربع را x بگیریم، در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ MBN و CPN داریم:

$$\mathrm{tg}\hat{B}=\frac{x}{۳-x} \text{ و } \cot\hat{C}=\frac{۶-x}{x}$$

ولی، چون زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، بنابراین

$$\mathrm{tg}\widehat{B} = \cot\widehat{C} \Rightarrow \frac{x}{۳ - x} = \frac{۶ - x}{x} \Rightarrow x = ۲$$

و این، ساده‌ترین راه حل مساله است.

یادداشت. راه حل هندسی مساله، بسیار ساده است. کافی است نیمساز زاویهٔ قائمهٔ A را رسم کنیم تا نقطهٔ N (یعنی، راسی از مربع که روی وتر است) به دست آید.

مثال ۳. *دوچرخه سواری که باید ۳۶ کیلومتر را بپیماید، برای خود، سرعتی را انتخاب کرد، تا در لحظه‌ای که قرار گذاشته بود، دوستش را ملاقات کند. ولی بعد از ۲ ساعت که از آغاز حرکت او گذشت، به‌دلیل بسته‌شدن جاده برای عبور قطار، ۲۰ دقیقه معطل شد. او، برای جبران وقت از دست داده، بقیهٔ راه را، با سرعتی که ۶ کیلومتر در ساعت بیش از سرعت قبلی او بود، رکاب زد و، درست در لحظهٔ قرار، به دوستش رسید. دوچرخه سوار، در لحظهٔ آغاز حرکت، چه سرعتی را انتخاب کرده بود؟*

سرعت نخستینِ دوچرخه سوار را x کیلومتر در ساعت فرض می‌کنیم. چون تمام مسیر حرکت او، برابر ۳۶ کیلومتر است، بنابراین دوچرخه‌سوار، به $\frac{۳۶}{x}$ ساعت، برای رسیدن به دوستش در ساعت قرار خود، نیاز داشته است.

ولی در عمل، به این ترتیب، ۳۶ کیلومتر را پیمود. در آغاز $۲x$ کیلومتر حرکت کرد (۲ ساعت و هر ساعت x کیلومتر)، بعد ۲۰ دقیقه، یعنی $\frac{۱}{۳}$ ساعت ایستاد و، سپس، بقیهٔ راه، یعنی $(۳۶ - ۲x)$ کیلومتر را با سرعت $(x + ۶)$ کیلومتر در ساعت، یعنی در $\frac{۳۶ - ۲x}{x + ۶}$ ساعت پیمود. بنابراین روی هم به اندازهٔ

$$\left(۲ + \frac{۱}{۳} + \frac{۳۶ - ۲x}{x + ۶}\right) \text{ساعت}$$

در راه بوده است که باید با $\frac{۳۶}{x}$ ساعت برابر باشد. به این معادله می‌رسیم:

$$۲ + \frac{۱}{۳} + \frac{۳۶ - ۲x}{x + ۶} = \frac{۳۶}{x}$$

که، به ترتیب، به این صورت حل می‌شود:

$$\frac{۳۶}{x} - \frac{۳۶ - ۲x}{x + ۶} = \frac{۷}{۳},$$

$$\frac{۲x^۲ + ۲۱۶}{x^۲ + ۶x} = \frac{۷}{۳}; x^۲ + ۴۲x - ۶۴۸ = ۰;$$

$$x = -۲۱ \pm \sqrt{۲۱^۲ + ۶۴۸} = -۲۱ \pm ۳۳$$

از آن‌جا $x = ۱۲$ یا $x = -۵۴$.

روشن است که، جواب منفی، قابل قبول نیست. سرعت نخستینِ دوچرخه سوار، ۱۲ کیلومتر در ساعت بوده است.

مثال ۴. *اگر قایق‌ران، ۳۴ کیلومتر در جهت حرکت آب و، سپس، ۳۹ کیلومتر در خلاف جهت حرکت آب پارو بزند، باید همان قدر وقت صرف کند که بخواهد ۷۵ کیلومتر را، در آب ساکن پارو بزند. نسبت سرعت قایق در آب ساکن را، به سرعت قایق در جهت جریان آب، پیدا کنید.*

اگر سرعت قایق را در آب ساکن برابر $v_۱$ کیلومتر در ساعت و سرعت جریان آب را $v_۲$ کیلومتر در ساعت فرض کنیم؛ آن وقت سرعت قایق، وقتی در جهت جریان آب حرکت می‌کند، برابر $v_۱ + v_۲$ کیلومتر در ساعت، و سرعت آن، وقتی در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، برابر $v_۱ - v_۲$ کیلومتر در ساعت خواهد شد. مساله؛ نسبت $v_۱$ به $v_۱ + v_۲$ را از ما خواسته

است. این نسبت را λ می‌نامیم:

$$\lambda = \frac{v_۱}{v_۱ + v_۲} = \frac{\frac{v_۱}{v_۱}}{\frac{v_۱}{v_۱} + \frac{v_۲}{v_۱}} = \frac{۱}{۱ + \frac{v_۲}{v_۱}}$$

اگر $\frac{v_۲}{v_۱}$ را x بنامیم، باید $\lambda = \frac{۱}{۱ + x}$ را پیدا کنیم.

قایق، ۳۴ کیلومتر را در جهت جریان آب، یعنی با سرعت $v_۱ + v_۲$ می‌پیماید؛ بنابراین $\frac{۳۴}{v_۱ + v_۲}$ ساعت وقت صرف می‌کند؛ سپس ۳۹ کیلومتر را در خلاف جهت جریان آب، یعنی با سرعت $v_۱ - v_۲$ طی می‌کند و، در نتیجه، $\frac{۳۹}{v_۱ - v_۱}$ ساعت وقت لازم دارد. مجموع این دو زمان، برابر زمانی است که ۷۵ کیلومتر را در آب ساکن، یعنی با سرعت $v_۱$ کیلومتر در ساعت می‌پیماید. به این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳۴}{v_۱ + v_۲} + \frac{۳۹}{v_۱ - v_۲} = \frac{۷۵}{v_۱}$$

در دو طرف معادله، مخرج‌ها را بر $v_۱$ (که مخالف صفر است) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۳۴}{۱ + \frac{v_۲}{v_۱}} + \frac{۳۹}{۱ - \frac{v_۲}{v_۱}} = ۷۵ \Rightarrow \frac{۳۴}{۱ + x} + \frac{۳۹}{۱ - x} = ۷۵$$

که از آن‌جا، به این معادلهٔ درجه دوم، برای x، می‌رسیم:

$$۷۵x^۲ + ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{۲}{۱۵}, x_۲ = -\frac{۱}{۵}$$

جواب منفی بی معنی است. با در دست داشتن x، مقدار λ محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \frac{۱}{۱ + x} = \frac{۱}{۱ + \frac{۲}{۱۵}} = \frac{۱۵}{۱۷}$$

□

به این ترتیب، برای این که مساله‌های محاسبه‌ای را (چه در جبر و چه در هندسه) به یاری جبر حل کنیم، باید این مرحله‌ها را در نظر بگیریم:

۱) فرض کنیم، مساله را حل کرده‌ایم و جواب را به دست آورده‌ایم. این جواب را، مثلاً x می‌نامیم؛

۲) با توجه به فرض‌های مساله، تلاش می‌کنیم، جواب را «مورد آزمایش» قرار دهیم (مثل زمانی که جواب عددی مساله را آزمایش می‌کنیم)؛

۳) از این راه، به معادله‌ای نسبت به مجهول x می‌رسیم که، با حل آن، مقدار x به دست می‌آید؛

۴) برای انتخاب مجهول، گاهی بهتر است، چیزی غیر از آن چه مساله خواسته است، در نظر بگیریم تا تشکیل معادله، یا حل معادله، ساده‌تر شود.

به طور کلی، برای تشکیل معادله (و یا گاهی، نامعادله)، نباید بدون اندیشه، عمل کرد. به آن چه در این‌جا گفتیم، نباید به صورت قانون نگاه کرد. این‌ها تنها، توصیه‌هایی برای راهنمایی است. در هر مساله، بنا به موقعیتی که دارد، باید در جست‌وجوی ساده‌ترین راه بود. برای تسلط در این زمینه، حل مساله‌هایی را که در این بخش آورده‌ایم، سفارش می‌کنیم.

تمرین‌ها

۲۴۲. جمشید ۳۰۰۰۰ ریال و برادرش ۵۰۰۰ ریال ذخیره دارند. جمشید ماهی ۲۰۰۰ ریال و برادرش ماهی ۳۰۰۰ ریال به ذخیرهٔ خود اضافه می‌کنند. آیا زمانی می‌رسد که، ذخیره دو برادر، برابر شود؟

۲۴۳. وقتی از فرود پرسیدند، در کلاس شما چند دانش‌آموز وجود دارد، پاسخ داد: اگر به دو برابر تعداد شاگردان کلاس ما، ۹ واحد اضافه کنیم، مثل این است که از چهار برابر تعداد شاگردان کلاس ما، ۴۲ واحد کم کنیم. فرود اشتباه کرده است. چرا؟

۲۴۴. در نیم دایره‌ای به شعاع ۵ متر، مربعی محاط کنید که، یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره و، دو راس آن، بر کمان نیم‌دایره منطبق باشد.

۲۴۵. مجموع ۵ عدد فرد پشت سر هم، برابر ۱۲۵ شده است. این عددها را پیدا کنید.

۲۴۶. دو برادر، روی هم ۳۰ سال دارند. یک سال دیگر، سن برادر بزرگتر سه برابر سن برادر کوچکتر می‌شود. سن امروز هر کدام از آن‌ها چقدر است؟

۲۴۷. فروشنده‌ای حساب کرد، اگر تخم‌مرغ‌های خود را، یکی ۴۵ ریال بفروشد، ۵۰۰ ریال زیان می‌بیند؛ ولی اگر آن‌ها را دانه‌ای ۶۰ ریال بفروشد، ۱۰۰۰ ریال سود می‌برد. تعداد تخم مرغ‌ها و قیمت خرید هر تخم مرغ چقدر بوده است؟

۲۴۸. پدر و پسری، در دو نوبت برای درو گندم، روی زمین صاحب ملک کار کردند. در نوبت اول ۷ روز را با هم و ۶ روز را، پدر به تنهایی کار کردند و ۵۳۹۰ ریال گرفتند. در نوبت دوم، ۲ روز پدر به تنهایی و ۷ روز همراه با پسرش کار کرد و ۳۹۹۰ ریال گرفتند. برای کار یک روز، پدر چه مبلغی گرفته است و پسر چه مبلغی؟

۲۴۹. به صورت کسری، یک واحد اضافه کرده‌ایم، کسر حاصل، هم‌ارز $\frac{۳}{۴}$ شده است؛ ولی اگر به مخرج آن دو واحد اضافه کنیم، هم‌ارز $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. کسر را پیدا کنید.

۲۵۰. گلدانی نقره‌ای داریم که، نسبت وزن نقرهٔ خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. نقره کار، آن را ذوب و ۱۱۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان تازه‌ای ساخت. می‌دانیم، $\frac{۴}{۵}$ وزن گلدان جدید، نقره است. گلدان، قبل از ذوب شدن، چه وزنی داشته است؟

۲۵۱. عددی، در تقسیم بر ۸ به باقی‌ماندهٔ ۳ و در تقسیم بر ۹ به

باقی‌ماندهٔ ۵ رسیده است. اگر مجموع دو خارج قسمت، برابر ۱۳ باشد، خود عدد را پیدا کنید.

۲۵۲. پولی را به این ترتیب، بین چند نفر تقسیم کردند. اولی ۲۰ تومان به اضافهٔ $\frac{1}{16}$ بقیهٔ پول را برداشت. دومی، ۱۵ تومان به اضافهٔ $\frac{1}{6}$ باقی‌ماندهٔ پول را برداشت. اگر سهم این دو نفر برابر شده باشد، مبلغ اصلی پول چقدر بوده است؟

۲۵۳. اگر از طول مستطیلی ۳ متر و از عرض آن ۲ متر کم کنیم، مساحت آن، ۴۸ متر مربع کمتر می‌شود. ولی اگر به طول آن ۳ متر و به عرض آن ۲متر اضافه کنیم، مساحت آن ۶۰ متر مربع بیشتر می‌شود. طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

۲۵۴. کاسبی، هر سال به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ سرمایهٔ خود در آغاز سال، سود می‌کند، در ضمن، سالی ۱۰ میلیون ریال، برای خرج زندگی خود برداشت می‌کند. اگر در پایان سال دوم، سرمایهٔ او دو برابر شده باشد، سرمایهٔ نخستین او را پیدا کنید.

۲۵۵. زمینی به شکل ذوزنقه با قاعدهٔ بزرگترِ به طول ۴۰ متر و قاعدهٔ کوچکترِ به طول ۳۰ متر داده شده است. روی قاعدهٔ بزرگتر، نقطه‌ای را در نظر گرفته‌ایم که همین قاعده را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم کرده است. نقطه‌ای روی قاعدهٔ کوچکتر پیدا کنید که، اگر آن را به نقطهٔ انتخابی در روی قاعدهٔ بزرگتر وصل کنیم، دو ذوزنقهٔ هم‌ارز (یعنی با مساحت‌های برابر) به دست آید.

۲۵۶. دو نفر به فاصلهٔ ۶۰ کیلومتر از یکدیگرند. اگر به طرف هم حرکت کنند، پس از ۳ ساعت و اگر در یک جهت (روی خط راستی که از این دو نقطه می‌گذرد) حرکت کنند، بعد از ۱۵ ساعت به هم می‌رسند. سرعت هر کدام از آن‌ها را پیدا کنید.

۲۵۷. مربع $ABCD$ مفروض است. به مرکز A و به شعاع برابر طول ضلع مربع، ربع دایره‌ای در داخل مربع رسم کرده‌ایم. همچنین به مرکز نقطهٔ C (راس روبه‌رو به A) و با شعاع برابر طول ضلع مربع، ربع دایرهٔ دیگری در درون مربع رسم کرده‌ایم. اگر مساحت بین دو کمان، ۵۷ سانتی‌متر مربع باشد، طول ضلع مربع را پیدا کنید. (عدد π را برابر ۳/۱۴ بگیرید.)

۲۵۸. روی کمان نیم‌دایرهٔ به قطر پاره خط راست AB، نقطهٔ C را طوری پیدا کنید که مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{1}{3}$ مساحت نیم دایره باشد.

۲۵۹. A می‌تواند کاری را در ۱۵ ساعت و B همان کار را در ۱۰ ساعت انجام دهد. A ساعت ۵ صبح و B ساعت ۷ صبح به انجام این کار مشغول شدند. کار در چه ساعتی تمام می‌شود؟

*۲۶۰. الف) اتوبوسی از شهر A به سمت شهر B، که در ۱۰۰ کیلومتری A واقع است، با سرعت یکنواخت v کیلومتر در ساعت حرکت کرد. ۳۰ دقیقه بعد از حرکت اتوبوس، پیکانی با سرعت یکنواخت ۴۰ کیلومتر در ساعت، به دنبال اتوبوس، به راه افتاد. همین که پیکان به اتوبوس رسید، برگشت و با همان سرعت، خود را به شهر A رسانید. v چه عددهایی می‌تواند باشد تا پیکان، بعد از آن که اتوبوس به شهر B می‌رسد، به شهر A برسد.

ب) همان مسالهٔ الف را، در حالتی که فاصلهٔ شهر B از شهر A برابر ۲۱۰ کیلومتر و سرعت پیکان برابر ۸۰ کیلومتر در ساعت باشد، حل کنید.

*۲۶۱. دو دوچرخه‌سوار، با هم و در یک جهت، از نقطه‌ای به راه افتادند: اولی با سرعت ساعتی ۱۵ کیلومتر و دومی با سرعت ساعتی ۱۲ کیلومتر. بعد از نیم ساعت، دوچرخه سوار سوم، از همان نقطه و در همان جهت حرکت کرد: بعد از مدتی به دوچرخه‌سوار دوم و یک ساعت و نیم بعد از آن، به دوچرخه سوار اول رسید. سرعت دوچرخه سوار سوم را پیدا کنید.

۲۶۲. روستاهای A و B در ساحل رودخانه‌اند و، از طریق آب، ۲۰ کیلومتر با هم فاصله دارند. جهانگرد، با قایق خود از A حرکت کرد. وقتی به B رسید، بلافاصله برگشت و خود را به نقطهٔ A رسانید. برای رفت و برگشت ۱۰ ساعت در راه بود. می‌دانیم، جهانگرد، برای ۳ کیلومتر قایق‌رانی در جهت جریان آب، همان قدر وقت صرف می‌کند که برای ۲ کیلومتر در خلاف جریان آب. سرعت آب رودخانه چقدر است؟

*۲۶۳. پیاده و اسب سوار از شهر A به طرف شهر B و دوچرخه سوار از شهر B به طرف شهر A، در یک زمان و هر کدام با سرعت‌های یکنواخت به راه افتادند. اسب تندتر از پیاده و دوچرخه تندتر از اسب حرکت می‌کنند. ۲ ساعت بعد از آغاز حرکت، دوچرخه و اسب، در ۳ کیلومتری وسط جادهٔ بین A و B، و ۲۰ دقیقه بعد، دوچرخه و پیاده به هم رسیدند. اگر بدانیم، سرعت دوچرخه سوار دو برابر سرعت پیاده است، فاصلهٔ بین دو شهر A و B و سرعت هر یک از سه نفر را پیدا کنید.

۲۶۴. اگر دو نفر با هم کار کنند، می‌توانند در ۶ ساعت آن را به پایان برسانند. اولی ۶ ساعت و، سپس، دومی ۴ ساعت کار کردند و ۸۰٪ کار را انجام دادند. هر کدام به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کنند؟

*۲۶۵. ضمن ضرب دو عدد طبیعی در یکدیگر، به اشتباه، رقم سدگان حاصل ضرب را، ۲ واحد بیشتر نوشتیم. برای امتحان عمل ضرب، این حاصل ضرب اشتباه را بر عدد کوچکتر تقسیم کردیم، خارج قسمت برابر ۵۰ و باقی‌مانده برابر ۲۵ شد. هر یک از این دو عدد را پیدا کنید.

*۲۶۶. با رقم‌های a، b و c، همهٔ عددهای سه رقمی را ساخته‌ایم؛ مجموع آن‌ها، از ۲۷۰۰ بیشتر و از ۲۹۰۰ کمتر شده است. می‌دانیم a، b و c سه رقم مختلف و مخالف صفرند؛ $\overline{abc}$ عددی زوج و بزرگترین عدد از بین عددهایی است که با شرط‌های مساله سازگار است؛ در ضمن، در هر عدد سه رقمی، هر سه رقم به کار رفته است. $\overline{abc}$ کدام عدد است؟

*۲۶۷. الف) عددهای طبیعی a، b و c چنان‌اند که داریم:

$$b = am, c = bm, (m > ۱, \text{ و عددی درست ، } m)$$

عددهای ۲۸۳۵ و ۲۶۴۶، بر b و c بخش‌پذیرند. عددهای a و b و c را پیدا کنید، به شرطی که، با توجه به شرط‌های مساله، مجموع $a + b + c$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

ب) همین مساله را با همان شرط‌ها حل کنید، تنها با این اختلاف که عدد ۲۲۴۰ بر b و ۴۳۱۲ بر c بخش‌پذیر باشد.

*۲۶۸. عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = m, a + b + c = ۱۹,$$

در ضمن، رقم یکان، ۵ واحد از رقم سدگان عدد، کمتر است.

حل تمرین‌ها

پیش از آغاز و یادآوری

۱. در یک سطر توان‌های متوالی ۲ را به ردیف می‌نویسیم و، در زیر هر یک، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم آن‌ها را بر ۷، قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{cccccc} ۲^{۱} = ۲ & ۲^{۲} = ۴ & ۲^{۳} = ۸ & ۲^{۴} = ۱۶ & ۲^{۵} = ۳۲ & \ldots \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۲ & ۴ & \ldots \end{array}$$

می‌بینیم، در تقسیم توان‌های متوالی ۲ بر ۷، برای باقی‌ماندهٔ تقسیم، رقم‌های ۲، ۴ و ۱ تکرار می‌شوند. عدد دهدهی ما چنین است:

$$۰/۲۴۱۲۴۱\ldots = ۰/(۲۴۱) = \frac{۲۴۱}{۹۹۹}$$

۲. وقتی ۳۸ عدد طبیعی متوالی را بنویسیم، عددها، یک در میان، یکی زوج و دیگری فرد است؛ یعنی مجموع هر دو عدد متوالی، عددی فرد می‌شود. بنابراین، ۱۹ عدد فرد به دست می‌آید، مثلاً

$$\underbrace{۱۵\ ۱۶}_{۳۱} \quad \underbrace{۱۷\ ۱۸}_{۳۵} \quad \underbrace{۱۹\ ۲۰}_{۳۹}\ldots\underbrace{۵۱\ ۵۲}_{۱۰۳}$$

و مجموع ۱۹ عدد فرد، خود عددی فرد است و نمی‌تواند بر عدد زوج ۳۸ بخش‌پذیر باشد.

نمی‌توان ۳۸ عدد طبیعی متوالی پیدا کرد که مجموع آن‌ها بر ۳۸ بخش‌پذیر باشد.

**یادداشت.* به سادگی می‌توان ثابت کرد که: مجموع ۳۸ عدد طبیعی پشت سر هم، بر ۱۹ (نصف ۳۸) بخش‌پذیر است. فرض کنیم، عددهای طبیعی را، از a آغاز کرده باشیم؛ ۳۸ عدد طبیعی از a تا $a + ۳۷$ را، یکبار از a تا $a + ۳۷$ و بار دیگر، بر عکس، از $a + ۳۷$ تا a، در دو ردیف زیر هم می‌نویسیم:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a, & a+۱, & a+۲, & \ldots, & a+۳۵, & a+۳۶, & a+۳۷ \\
a+۳۷, & a+۳۶, & a+۳۵, & \ldots, & a+۲, & a+۱, & a
\end{array}
$$

اگر این دو ردیف را با هم جمع کنیم، همه جا $۲a + ۳۷$ به دست می‌آید که، مجموع همهٔ آن‌ها برابر $۳۸(۲a + ۳۷)$ و نصف آن، یعنی مجموع ۳۸ عدد طبیعی متوالی با آغاز از عدد a، برابر $۱۹(۲a + ۳۷)$ می‌شود که بر ۱۹ بخش‌پذیر است و، چون عددی فرد است (چرا؟)، بر ۳۸ بخش‌پذیر نیست.

به طور کلی، مجموع n عدد طبیعی متوالی، در حالت فرد بودن n، بر خود n و در حالت زوج بودن n بر نصف n بخش‌پذیر است (حالت فرد بودن n، را خودتان ثابت کنید).

۳. اشتباه در آخرین عمل است. دو طرف برابری

$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$

بر $a-b-c$ تقسیم شده است؛ ولی $a-b-c$ برابر صفر است و نمی‌توان دو طرف برابری را بر صفر تقسیم کرد.

۴. یکی از راه‌حل‌ها، در جدول زیر داده شده است:

ظرف‌ها	در آغاز	بعد از جابه‌جایی									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۰ لیتری	۱۰	۷	۷	۴	۴	۱	۱	۸	۸	۵	۵
۷ لیتری	—	—	۳	۳	۶	۶	۷	—	۲	۲	۵
۳ لیتری	—	۳	—	۳	—	۳	۲	۲	—	۳	—

۵. هر عدد طبیعی، به یکی از ۶ صورت زیر است:

$$۶k, ۶k+۱, ۶k+۲, ۶k+۳, ۶k+۴, ۶k+۵$$

از این ۶ حالت، تنها عددهای به صورت $۶k+۱$ و $۶k+۵$ بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیستند؛ زیرا $۶k$ بر ۲ و ۳، $۶k+۲$ بر ۲، $۶k+۳$ بر ۳ و $۶k+۴$ بر ۲ بخش‌پذیر است. برای $۶k+۱$ داریم:

$$۶k+۱ = ۳(۲k)+۱ = ۳n+۱,$$

و برای $۶k+۵$:

$$۶k+۵ = ۳(۲k+۱)+۲ = ۳n+۲$$

می‌بینیم، اگر n عددی زوج باشد ($n=۲k$)، جملهٔ nام برابر $۳n+۱$ و اگر n فرد باشد ($n=۲k+۱$)، جملهٔ nام به صورت $۳n+۲$ درمی‌آید. جملهٔ nام یک دنباله را با u_n نشان می‌دهند. بنابراین

$$u_n = \begin{cases} ۳n+۲ & (n=۲k+۱) \\ ۳n+۱ & (n=۲k) \end{cases}$$

در ضمن، جملهٔ صدم، چون ۱۰۰ عددی زوج است، چنین می‌شود:

$$u_{۱۰۰} = ۳ \times ۱۰۰ + ۱ = ۳۰۱$$

یادداشت. این مساله، نمونه‌ای از مساله‌هایی است که پیدا کردن راه‌حل کلی آن، ساده‌تر از راه حلِ آن برای یک حالت خاص است. همان طور که دیدید، ابتدا جملهٔ nام را به دست آوردیم و، بعد، به کمک آن، مقدار جملهٔ صدم به سادگی به دست آمد.

یادآوری این مطلب ضروری است که: بعد از پیدا کردن جملهٔ عمومی، باید آن را، برای حالت خاص آزمایش کرد. در این‌جا، به ازای $n = ۱$، خواهیم داشت:

$$u_۱ = ۳ \times ۱ + ۲ = ۵$$

به ازای $n = ۲$:

$$u_۲ = ۳ \times ۲ + ۱ = ۷$$

و غیره، که با دنبالهٔ ما تطبیق می‌کند. ولی ممکن بود، دنباله را به این صورت بدهند:

$$۱, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, \ldots$$

آن وقت، عدد ۱ را نمی‌شد جمله اول دانست: عدد ۱، در این‌جا «جمله صفرم» است. صفر عددی زوج به حساب می‌آید و

$$u_۰ = ۳n + ۱ = ۳ \times ۰ + ۱ = ۱$$

۶. *پاسخ.* نام بچه‌ها، از راست به چپ: گودرز، کیوان، آرش، بهروز، مانی.

۷. داریم:

$$\begin{aligned} n^۳ - ۳n^۲ + ۴ &= n^۳ + n^۲ - ۴n^۲ + ۴ = \\ &= n^۲(n + ۱) - ۴(n^۲ - ۱) = \\ &= n^۲(n + ۱) - ۴(n - ۱)(n + ۱) = \\ &= (n + ۱)(n^۲ - ۴n + ۴) = (n + ۱)(n - ۲)^۲ \end{aligned}$$

یعنی باید $(n-۲)^۲(n+۱)$ بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد. ولی ۱۷۳، عددی اول است، پس باید یا $n+۱$ و یا $n-۲$ بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد. چون کوچکترین عدد n را لازم داریم، باید $n+۱$ یا $n-۲$ برابر ۱۷۳ باشد:

$$n + ۱ = ۱۷۳ \Rightarrow n = ۱۷۲;$$
$$n - ۲ = ۱۷۳ \Rightarrow n = ۱۷۵$$

(نماد $\Rightarrow$ را بخوانید: نتیجه می‌دهد). کوچکترین عددی که می‌توان برای n در نظر گرفت تا $n^۳ - ۳n^۲ + ۴$ بر ۱۷۳ بخش‌پذیر باشد، عبارت است از $n = ۱۷۲$ که، در این صورت، خواهیم داشت:

$$n^۳ - ۳n^۲ + ۴ = ۱۷۳ \times ۱۷۰^۲$$

۸. توجه کنیم، در این‌جا، هر عضو دنبالهٔ ما، یک مجموعه است. این دنباله را با روش‌های مختلفی می‌توان پیدا کرد، ولی در این‌جا راه حلی انتخاب شده است که برای هر مجموعه‌ای، با هر تعداد عضو، قابل استفاده باشد. در ضمن، برای کوتاه‌تر کردن بحث، مثلاً به جای این که بگوییم: مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۴\}$، می‌نویسیم ۱۳۴.

در آغاز، چنین دنباله‌ای را، برای زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای می‌نویسیم که تنها شامل دو عضو ۱ و ۲ باشد. این دنباله چنین است:

$$\phi, ۱, ۱۲, ۲$$

(هر جملهٔ دنباله، با هر یک از جمله‌های مجاور خود، تنها در یک عضو اختلاف دارد؛ البته، جای جمله‌های ۱ و ۲ را می‌توان عوض کرد، ولی برای این که، ضمن ادامهٔ جمله‌های دنباله، بتوانیم با سادگی بیشتری جلو برویم، آن را که نمایندهٔ عدد کوچکتری است، در آغاز نوشته‌ایم).

اکنون، به هر یک از زیر مجموعه‌ها (یعنی هر جملهٔ این دنباله)، عضو ۳ را اضافه می‌کنیم و، نتیجه را در جهت عکس، یعنی از آخر به اول، به دنبال جمله‌های دنبالهٔ قبلی می‌نویسیم. این دنباله از زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ سه عضوی به دست می‌آید که با شرط‌های مساله سازگار است

$$\phi, ۱, ۱۲, ۲, ۲۳, ۱۲۳, ۱۳, ۳$$

همین عمل را با دنبالهٔاخیر و عضو ۴ انجام می‌دهیم، به دنبالهٔ مورد نظر مساله می‌رسیم:

$$\phi, ۱, ۱۲, ۲, ۲۳, ۱۲۳, ۱۳, ۳,$$
$$۳۴, ۱۳۴, ۱۲۳۴, ۲۳۴, ۲۴, ۱۲۴, ۱۴, ۴$$

توجه داشته باشید که، در این جا، ثابت نکردیم که این، تنها پاسخ مساله است.

۹. طول کمان AB (نیم دایرهٔ بزرگ) با مجموع طول‌های کمان‌های AC و CD و DB برابر است.

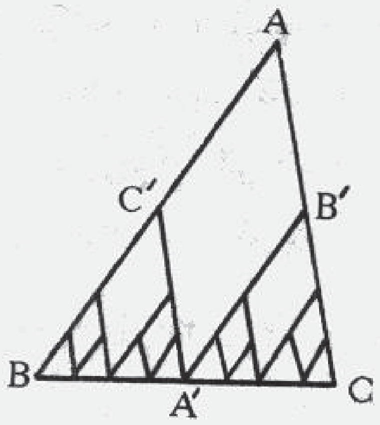
فرض کنید، طول پاره‌خط راست AB (قطر نیم‌دایرهٔ بزرگ) برابر a باشد. بنابراین

$$|AC| = \frac{۱}{۲}a, |CD| = |DB| = \frac{۱}{۴}a$$

محیط هر دایره، برابر حاصل ضرب قطر آن در عدد π است و طول کمان نیم‌دایره برابر نصف این مقدار. پس

$$\text{طول کمان } AB = \frac{۱}{۲}a\pi, \text{طول کمان } AC = \frac{۱}{۴}a\pi,$$

$$\text{طول کمان } CD = \text{طول کمان } DA = \frac{۱}{۸}a\pi;$$



شکل ۶۱

$$\frac{۱}{۲}a\pi = \frac{۱}{۴}a\pi + \frac{۱}{۸}a\pi + \frac{۱}{۸}a\pi$$

***یادداشت.** به مناسبت حل این مساله، موضوعی را مطرح می‌کنیم که، توجه به آن، اهمیت جدی دارد.

موضوع را روی مثال ساده‌تری شرح می‌دهیم. در مثلث غیر مشخص ABC، نقطه‌های A'، B' و C'، وسط ضلع‌های مثلث‌اند (شکل ۶۱). به سادگی ثابت می‌شود:

$$|BC'| + |C'A'| + |A'B'| + |B'C| = |AB| + |AC|$$

اگر همین عمل را دربارهٔ مثلث‌های $C'BA'$ و $B'A'C$ انجام دهیم، به ۸ پاره‌خط راست می‌رسیم که، مجموع طول‌های آن‌ها، با مجموع طول‌های دو ضلع AB و AC برابر است. فرض کنید، این عمل را ۱۰۰ بار، یا ۱۰۰۰ بار ادامه دهیم، پاره‌خط‌های راست (که تعدادشان بسیار زیاد می‌شود) مرتباً به خط راست BC نزدیک می‌شوند، به نحوی که نمی‌توان آن‌ها را از پاره‌خط راست BC تمیز داد. در ریاضیات می‌گویند: این پاره‌خط‌های راست، مرتباً، به خط راست BC نزدیک و نزدیکتر می‌شوند و به سمت آن میل می‌کنند، به نحوی که اگر عمل فوق را، بی‌نهایت بار تکرار کنیم، بر خود پاره خط راست

BC منطبق می‌شوند.

آیا از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که: طول ضلع BC با مجموع طول‌های دو ضلع AB و AC برابر است؟ روشن است که پاسخ به این پرسش، منفی است.

دربارهٔ «بی‌نهایت» (که آن را با نماد ∞ نشان می‌دهند)، نباید اشتباه کرد. «بی‌نهایت» یک عدد نیست و کمیّت مشخصی را بیان نمی‌کند، «بی‌نهایت» یک مفهوم است و تنها نشان می‌دهد که: «از هر مقدار مشخصی بیشتر است».

به همین مناسبت، هر جا با «بی‌نهایت» سروکار داریم، باید دربارهٔ نتیجه‌گیری‌ها و دربارهٔ مجاز بودن عمل‌ها دقت کنیم تا دچار اشتباه نشویم. در «سرزمین بی‌نهایت‌ها»، قانون‌هایی حکومت می‌کند که، در بیشتر موردها، با قانون‌های حاکم بر «سرزمین عددها» متفاوت است. مجموع زیر را که دارای بی‌نهایت جمله است، در نظر می‌گیریم.

$$A = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

اگر A را به این صورت بنویسیم:

$$A = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots$$

برابر صفر می‌شود و اگر به صورت

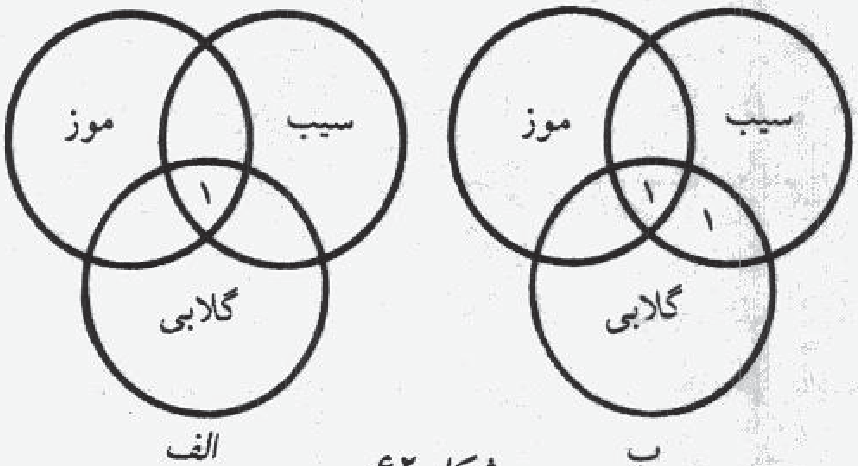
$$A = ۱ - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - \dots$$

برابر ۱ می‌شود و، عجیب‌تر:

$$A = ۱ - (۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots)$$

مقدار داخل پرانتز همان A است، پس

$$A = ۱ - A$$



شکل ۶۲

و یا $۲A = ۱$ که، از آن‌جا، مقدار A برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. چقدر عجیب! مجموع عددهای درست، برابر یک کسر شده است!

A چقدر است: ۱ یا ۱− یا $\frac{۱}{۲}$؟ در واقع، هیچ کدام! A مقدار معینی ندارد.

در قلمرو بی‌نهایت‌ها، احتیاط کنید؛ در هر گامی که برمی‌دارید، ممکن است خطری شما را تهدید کند که موجب اشتباه در نتیجهٔ کار بشود.

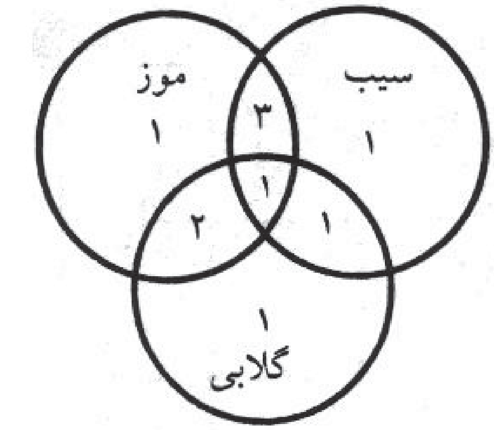
۱۰. *پاسخ.*

$$۳ + ۶ = ۹, \quad ۸ - ۷ = ۱, \quad ۴ \times ۵ = ۲۰$$

۱۱. ساده‌ترین راه‌حل برای این مساله، استفاده از نمودار وِنْ در مجموعه‌هاست.

به شکل ۶۲ـالف توجه کنید. می‌دانیم ۱ نفر هر سه میوهٔ موز، سیب و گلابی را انتخاب کرده است. در بخش مشترک سه دایره، عدد ۱ را گذاشته‌ایم.

۲ نفر به سیب و گلابی علاقه‌مندند. در بخش مشترک دو دایرهٔ معرف سیب و گلابی، عدد ۱ وجود دارد، ولی در این بخش باید ۲ نفر باشند، عدد



شکل ۶۳

۱ را در بخش باقی‌مانده‌ای که بین دایره‌های سیب و گلابی مشترک است قرار داده‌ایم (شکل ۶۲_ب).

اگر به‌همین ترتیب، به‌بخش مشترک دو دایرهٔ مربوط به‌موز و گلابی و، سپس به دایره‌های موز و سیب بپردازیم، همهٔ بخش‌های مشترک دایره‌ها پر می‌شوند (شکل ۶۳). در دایرهٔ گلابی باید ۵ نفر باشند، ۱ نفر باقی مانده را در بخش غیر مشترک دایرهٔ مربوط به گلابی می‌نویسیم و غیره. اکنون کافی است همهٔ این عددها را با هم جمع کنیم.

پاسخ. بچه‌ها روی هم ۱۰ نفر بوده‌اند.

۱۲. پاسخ را در شکل ۶۴ می‌بینید.

۱۳. ۵۷۶ مجذور کامل است، زیرا بعد از تجزیه، به صورت

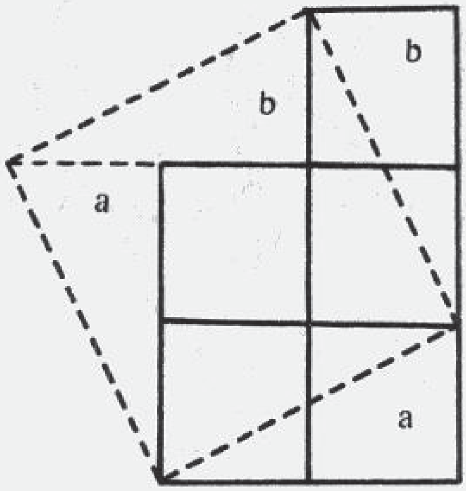
$$۵۷۶ = ۲^۶ \times ۳^۲ = (۲^۳ \times ۳)^۲ = ۲۴^۲$$

درمی‌آید، پس

$$۵۷۶۰۰ = ۵۷۶ \times ۱۰۰ = ۲۴^۲ \times ۱۰^۲ = ۲۴۰^۲$$

اکنون، برای عدد ۵۷۵۹۹ داریم:

$$۵۷۵۹۹ = ۵۷۶۰۰ - ۱ = ۲۴۰^۲ - ۱ =$$



شکل ۶۴

$$= (۲۴۰ - ۱)(۲۴۰ + ۱) = ۲۳۹ \times ۲۴۱$$

بنابراین ۵۷۵۹۹، عددی اول نیست (۲۳۹ و ۲۴۱، عددهایی اول‌اند).

۱۴. درآغاز، مطلبی را به‌یاد بیاوریم: باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم یک عدد مجذور کامل بر ۳، نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا از تقسیم یک عدد طبیعی بر ۳، به یکی از باقی‌مانده‌های

۰ یا ۱ یا ۲

می‌رسیم. اگر عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، مجذور آن نیز بر ۳ بخش‌پذیر است. اگر از تقسیم عدد طبیعی بر ۳، به باقی‌ماندهٔ ۱ برسیم، در تقسیم مجذور آن بر ۱ هم به همان باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسیم؛ و اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۳ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم مجذور آن بر ۳، برابر باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲^۲$، یعنی ۴ بر ۳، است که همان عدد ۱ می‌شود.

پس باقی‌ماندهٔ عدد $n^۲$ بر ۳ برابر است با ۰ یا ۱ و، در نتیجه، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $n^۲ + ۱$ بر ۳، برابر است با ۱ یا ۲، یعنی $n^۲ + ۱$، هرگز بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

ولی اگر برای نوشتن عدد ده‌رقمی $n^۲ + ۱$، از هر ۱۰ رقم استفاده شده باشد، مجموع رقم‌های آن، برابر

$$۰ + ۱ + ۲ + \ldots + ۹ = ۴۵$$

می‌شود و، بنابراین باید عدد $n^۲ + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست.

۱۵. داریم:

$$۱۰^{۱۳۷۵} - ۱ = \underbrace{۹۹۹\ldots۹۹}_{\text{۱۳۷۵ رقم}};$$

$$\frac{۱۰^{۱۳۷۵} - ۱}{۸۱} = \frac{۹۹۹\ldots۹۹}{۸۱} = \frac{۱۱۱\ldots۱۱}{۹}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰^{۱۳۷۵} - ۱}{۸۱} - \frac{۱۳۷۵}{۹} = \frac{۱۱۱\ldots۱۱ - ۱۳۷۵}{۹}$$

عدد ۱۱ . . . ۱۱۱، دارای ۱۳۷۵ رقم و، بنابراین، مجموع رقم‌های آن، برابر ۱۳۷۵ می‌شود. از طرف دیگر، مجموع رقم‌های عدد ۱۳۷۵ برابر ۱۶ و، در نتیجه، مجموع رقم‌های عدد

$$\underbrace{۱۱۱\ldots۱۱}_{\text{۱۳۷۵ رقم}} - ۱۳۷۵$$

برابر ۱۶ − ۱۳۷۵، یعنی ۱۳۵۹ می‌شود که بر ۹ بخش‌پذیر است.

۱۶. تعداد عددهایی که نتوان آن‌ها را به صورت مجموع یک مجذور کامل و یک عدد اول نوشت، بی‌نهایت است. عددهای ۳۱ و ۳۴ از این گونه‌اند.

به عنوان مثال، هر عددی که به صورت $(۳k + ۲)^۲$ باشد $(k \in \mathbf{N})$، نمی‌تواند به صورت مجموع دو عدد نوشته شود که یکی از آن‌ها مجذور کامل

و دیگری عددی اول باشد. این مطلب را ثابت می‌کنیم. n را عددی طبیعی و p را عددی اول در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بتوانیم بنویسیم:

$$(۳k + ۲)^۲ = n^۲ + p$$

از این برابری، p را به دست می‌آوریم:

$$p = (۳k + ۲)^۲ - n^۲ = (۳k + ۲ - n)(۳k + ۲ + n)$$

p عددی است اول و، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۳k + ۲ - n = ۱ \Rightarrow n = ۳k + ۱$$

یعنی، عدد اول p، چنین می‌شود:

$$p = ۳k + ۲ + n = ۳k + ۲ + ۳k + ۱ = ۶k + ۳ =$$
$$= ۳(۲k + ۱)$$

که برای $k > ۰$ ممکن نیست، زیرا p باید عددی اول باشد.

به این ترتیب، به شرط این که عدد طبیعی k، عددی مثبت باشد، همهٔ عددهای به صورت $(۳k + ۲)^۲$ پاسخ مسالهٔ ما هستند که، تعداد آن‌ها، بی‌نهایت است.

یادداشت. عددهایی که قابل تبدیل به مجموع یک مجذور کامل و یک عدد اول نباشند، محدود به عددهای به صورت $(۳k + ۲)^۲$ نمی‌شوند. مثلاً شما می‌توانید، با استدلال مشابهی ثابت کنید، هر عدد به صورت $(۵k+۳)^۲$ هم از این گونه است. عددهای ۳۱ و ۳۴ را که در آغاز حل آوردیم، منطبق بر هیچ کدام از عددهای $(۳k + ۲)^۲$ یا $(۵k + ۳)^۲$ نیستند (چون مجذور کامل نیستند).

۱۷. وقتی x را در سمت چپ y بنویسیم، عدد شش رقمی حاصل، برابر $۱۰۰۰x + y$ می‌شود و، همچنین، در حالتی که x را در سمت راست y بنویسیم، عددی شش رقمی برابر $۱۰۰۰y + x$ به دست می‌آید. اگر فرض کنیم $x > y$، تفاضل این دو عدد شش رقمی، برابر

$$۹۹۹(x - y) = ۳۷ \times ۲۷(x - y)$$

می‌شود که، به روشنی بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۱۸. برابری فرض را به این صورت می‌نویسیم:

$$۲(a^۸ + b^۸ + c^۸) - (a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲ = ۰$$

عبارت سمت چپ برابری اخیر را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۲(a^۸ + b^۸ + c^۸) - (a^۴ + b^۴ + c^۴)^۲ = \\
&= (۲a^۸ + ۲b^۸ + ۲c^۸) - (a^۸ + b^۸ + c^۸ + ۲a^۴b^۴ + ۲a^۴c^۴ + \\
&+ ۲b^۴c^۴) = a^۸ + b^۸ + c^۸ - ۲a^۴b^۴ - ۲a^۴c^۴ - ۲b^۴c^۴ = \\
&= (a^۴ + b^۴ - c^۴)^۲ - ۴a^۴b^۴ = \\
&= (a^۴ + b^۴ - c^۴ + ۲a^۲b^۲)(a^۴ + b^۴ - c^۴ - ۲a^۲b^۲) = \\
&= [(a^۲ + b^۲)^۲ - c^۴][(a^۲ - b^۲)^۲ - c^۴] = \\
&= (a^۲ + b^۲ + c^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)(a^۲ - b^۲ + c^۲)(a^۲ - b^۲ - c^۲)
\end{aligned}$$

حاصل‌ضرب این چهار پرانتز باید برابر صفر باشد، پس دست کم یکی از پرانتزها برابر صفر است.

$a^۲ + b^۲ + c^۲$ (پرانتز اول) نمی‌تواند برابر صفر شود (مجموع سه عدد مثبت، برابر صفر نیستند)، پس یکی از سه پرانتز دیگر برابر صفر است و،

در هر حال، مثلث قائم‌الزاویه می‌شود (مثلث در راس روبه‌روی ضلع a یا در راس روبه‌روی ضلع b و یا در راس روبه‌روی ضلع c، قائمه است).

۱۹. عدد $۵^{۱۲} + ۲^{۱۴}$ قابل تجزیه است:

$$۲^{۱۴} + ۵^{۱۲} = ۲^{۱۴} + ۵^{۱۲} + ۲^{۸} \times ۵^{۶} - ۲^{۸} \times ۵^{۶} =$$
$$= (۲^{۷} + ۵^{۶})^{۲} - (۲^{۴} \times ۵^{۳})^{۲} =$$
$$= (۲^{۷} + ۵^{۶} + ۲^{۴} \times ۵^{۳})(۲^{۷} + ۵^{۶} - ۲^{۴} \times ۵^{۳}) =$$
$$= ۱۷۷۵۳ \times ۱۳۷۵۳$$

۲۰. فرض کنید:

$$a = x^{۲} + y^{۲}$$

a، عددی زوج است، پس x و y، یا هر دو زوج و یا هر دو فردند. بنابراین، $x + y$ و $x - y$، عددهای زوج و $\frac{x+y}{۲}$ و $\frac{x-y}{۲}$ عددهایی درست‌اند. از طرف دیگر داریم:

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{x-y}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}(x^{۲} + ۲xy + y^{۲}) +$$
$$+ \frac{۱}{۴}(x^{۲} - ۲xy + y^{۲}) = \frac{۱}{۲}(x^{۲} + y^{۲}) = \frac{۱}{۲}a$$

۲۱. سه زیر مجموعه را $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم، حکم مساله نادرست باشد، یعنی اگر دو عضو از دو زیر مجموعهٔ مختلف در نظر بگیریم، مجموع آن‌ها متعلق به مجموعهٔ سوم باشد.

دو عدد a و b، یکی فرد و دیگری زوج را متعلق به دو مجموعهٔ مختلف فرض می‌کنیم. بدون این که به کلی بودن بحث لطمه‌ای وارد شود، a را فرد و متعلق به $M_۲$، b را زوج و متعلق به $M_۱$ فرض می‌کنیم. به ترتیب، باید

داشته باشیم:

$$\begin{cases} a \in M_1 \\ b \in M_2 \end{cases} \Rightarrow a+b \in M_3;$$

$$\begin{cases} a+b \in M_3 \\ b \in M_2 \end{cases} \Rightarrow a+2b \in M_1;$$

$$\begin{cases} a+2b \in M_1 \\ b \in M_2 \end{cases} \Rightarrow a+3b \in M_3$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، روشن می‌شود که عدد $a+nb$، در حالت زوج بودن n عضو M_1 و در حالت فرد بودن n عضو M_3 است:

$$\begin{cases} a+2kb \in M_1 \\ a+(2k+1)b \in M_3 \end{cases} \quad (1)$$

با همین استدلال و همین روش، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} 2ka+b \in M_2 \\ (2k+1)a+b \in M_3 \end{cases} \quad (2)$$

اکنون $b = 2m$ می‌گیریم (b را عددی زوج در نظر گرفته بودیم) و به عدد $ab+a+b$ توجه می‌کنیم. از یک طرف داریم:

$$ab+a+b = 2ma+a+b = (2m+1)a+b$$

که بنابر (۲) باید عضو زیر مجموعهٔ M_3 باشد:

$$(2m+1)a+b \in M_3 \quad (3)$$

از طرف دیگر، همین عدد را می‌توان این طور نوشت:

$$ab+a+b = (a+1)b+a$$

a عددی فرد و $a+1$ عددی زوج است. $a+1=2p$ می‌گیریم:

$$ab+a+b=2pb+a$$

که با توجه به (۱)، باید عضو M_1 باشد:

$$ab+a+b\in M_1 \qquad (4)$$

(۳) و (۴) با هم ناسازگارند، زیرا مجموعه‌های M_1 و M_3 عضو مشترکی ندارند. این ناسازگاری روشن می‌کند که، اگر دو عضو از دو زیر مجموعهٔ مختلف انتخاب کنیم، مجموع آن‌ها، ممکن است عضو زیر مجموعهٔ سوم نباشد.

۲۲. اتحاد جبری زیر، همه چیز را روشن می‌کند:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=(x^2-y^2-z^2)^2+(2xy)^2+(2xz)^2$$

(درستی این اتحاد را ثابت کنید!). در ضمن، اگر x را کوچکترین عدد، از بین سه عدد x و y و z فرض کنیم، در سمت راست اتحاد بالا، مقدار داخل پرانتز اول مخالف صفر می‌شود (مقدارهای داخل دو پرانتز دیگر، به خودی خود، مخالف صفرند).

۲۳. عبارت a^4+4b^4 قابل تجزیه است:

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=$$
$$=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$$

بنابراین، عدد a^4+4b^4 همیشه عددی مرکب است، مگر وقتی که داشته باشیم:

$$a^2+2b^2-2ab=1$$

که آن را می‌توان این طور نوشت:

$$(a-b)^۲+(b^۲-۱)=۰$$

و این برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a-b=۰ \\ b^۲-۱=۰ \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a=b=۱ \text{ یا } a=b=-۱$$

و در هر دو حالت، برای $a^۴+۴b^۴$، عدد اول ۵ به دست می‌آید.

۲۴. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد ۲ بر ۳ را می‌توان برابر ۱− گرفت:

$$۲=۱\times ۳-۱$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد $۲^{۳۴۵۶۷۸۹}+۱$ بر ۳، برابر است با:

$$۱+(-۱)^{۳۴۵۶۷۸۹}=۱+(-۱)=۰$$

عدد مفروض بر ۳ بخش‌پذیر است و عددی اول نیست.

۲۵. عدد دهدهی مورد نظر را، با رقم‌های بیشتری در نظر می‌گیریم:

$$۰/abcdefgh\ldots$$

این دنباله را، که هر عضو آن شامل دو رقم متوالی این کسر است، در نظر می‌گیریم:

$$(a,b);(c,d);(e,f);(g,h);\ldots \qquad (۱)$$

رقم‌های از ۰ تا ۹، تنها به ۹۰ نوع مختلف می‌توانند دو به دو در کنار هم قرار گیرند (چرا تنها ۹۰ نوع؟). بنابراین، اگر دنبالهٔ (۱) را ادامه دهیم، حداکثر تا جملهٔ نودم ممکن است، جملهٔ (a, b) یا یکی از جمله‌های دیگر این دنباله، تکرار نشود (چه بسا که خیلی زودتر از آن، به این جمله برسیم)، تکرار (a, b)، یا هر جملهٔ دیگر دنباله، به معنای آن است که، از آن‌جا به بعد، جمله‌های قبلی با همان ردیف تکرار می‌شوند، یعنی کسر دهدهی ما، دوره‌ای است. مثلاً فرض کنید، عدد دهدهی ما، با دو رقم ۵ و ۷ آغاز شده باشد:

$$۰/۵۷...$$

اگر طبق شرط مساله، رقم‌های بعدی را تعیین کنیم، به دست می‌آید (تنها رقم‌ها را نوشته‌ایم):

۵۷	۲۹	۱۰	۱۱	۲۳	۵۸	۳۱	۴۵	۹۴	۳۷
۰۷	۷۴	۱۵	۶۱	۷۸	۵۳	۸۱	۹۰	۹۹	۸۷
۵۲	۷۹	۶۵	۱۶	۷۳	۰۳	۳۶	۹۵	۴۹	۳۲
۵۷	...								

می‌بینید، سرانجام، بعد از ۳۰ زوج عدد (یعنی در رقم‌های شصت‌ویکم و شصت‌ودوم) به همان زوج نخستینِ ۵۷ رسیده‌ایم و روشن است که، از آن به بعد، همان شصت رقم قبلی پشت سر هم تکرار می‌شوند. کسر دهدهی ما دوره‌ای است و کوچکترین دورهٔ گردش آن، یک عدد ۶۰ رقمی است.

ولی اگر کسر دهدهی ما با دو رقم ۴۲ آغاز شده باشد:

$$۰/۴۲...$$

خیلی زود به دُور می‌افتد:

$$۰/۴۲۶۸۴۲۶۸... = ۰/(۴۲۶۸) =$$
$$= \frac{۴۲۶۸}{۹۹۹۹} = \frac{۳۸۸}{۹۰۹}$$

۲۶. با آن که، برای حل این مساله، می‌توان از راه‌های کوتاه‌تری استفاده کرد، برای این که با روش کلی حل این مساله‌ها آشنا شوید، آن را با روش «یافتن باقی‌مانده» حل می‌کنیم.

برای این که عدد $۱۳^{۲۳} - ۴۷^{۳۳}$ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید عددهای $۴۷^{۳۳}$ و $۱۳^{۲۳}$ به یک رقم ختم شده باشند، ولی برای هر دو عدد کافی است تنها به رقم آخر پایه توجه کنیم و ببینیم $۷^{۳۳}$ و $۳^{۲۳}$ به چه رقم‌هایی ختم شده‌اند.

$۷^{۳۳}$ برابر است با $(۷^۳)^{۱۱}$ یا $۳۴۳^{۱۱}$، یعنی باید رقم سمت راست عدد $۳^{۱۱}$ را محاسبه کنیم. داریم

$$۳^{۱۱} = ۳^۲ \times ۳^۹ = ۹ \times ۲۷^۳$$

پس باید رقم سمت راست $۷^۳ \times ۹$ یا ۳۴۳×۹ را پیدا کنیم که برابر ۷ است: عدد $۴۷^{۳۳}$ به ۷ ختم شده است.

$۳^{۲۳}$ برابر است با $۳^{۲۲} \times ۳$ یا $۳(۳^{۱۱})^۲$. دیدیم $۳^{۱۱}$ به ۷ ختم می‌شود. پس باید رقم سمت راست عدد $۷^۲ \times ۳$ یا ۴۹×۳ را پیدا کنیم که برابر ۷ است.

هر دو عدد به ۷ ختم شده‌اند، بنابراین تفاضل آن‌ها به صفر ختم می‌شود و بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۲۷. در سمت چپ برابری

$$x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + \ldots + x_{n-۱}x_n + x_nx_۱ = ۰ \qquad (۱)$$

n جمله وجود دارد و، هر جملهٔ آن، برابر ۱+ یا ۱− است، بنابراین برای این که برابر صفر باشد، باید تعداد جمله‌هایی که برابر ۱+ هستند، برابر تعداد جمله‌هایی باشد که برابر ۱− هستند، یعنی n عددی زوج است: $n = ۲k$.

از طرف دیگر، اگر همهٔ جمله‌های سمت چپ برابری (۱) را در هم ضرب کنیم، به عبارت

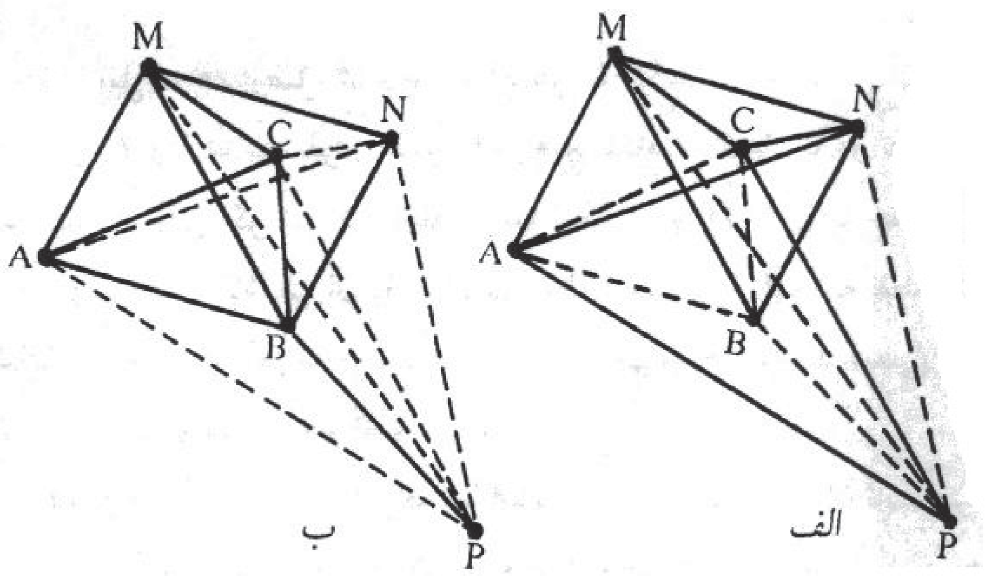
$$(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n)^2$$

می‌رسیم که عددی مثبت است؛ ولی برای این که حاصل ضرب چند عدد، که هر یک از آن‌ها یا ۱+ و یا ۱− است، عددی مثبت شود، باید تعداد جمله‌های منفی (و همچنین تعداد جمله‌های مثبت) عددی زوج باشد، یعنی k عددی زوج و n بر ۴ بخش‌پذیر است.

۲۸. یکی از ۶ نفر را در نظر می‌گیریم. روشن است که، در بین پنج نفر دیگر، می‌توان سه نفر پیدا کرد که این فرد یا هر سه نفر را بشناسد و یا در بین آن سه نفر آشنایی نداشته باشد. بدون این که به کلی بودن راه‌حل لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که هر سه نفر را بشناسد. این سه نفر را A، B و C می‌نامیم. اگر دست کم دو نفر از این سه نفر، با هم آشنا باشند، آن وقت، این دو نفر همراه با نفر انتخابی ما، یک گروه سه نفری را تشکیل می‌دهند که، دو به دو، یکدیگر را می‌شناسند. ولی اگر از A و B و C، هیچ کدام با هم آشنا نباشند، خودشان گروه سه نفری را تشکیل می‌دهند که، دو به دو، با هم آشنا نیستند.

یادداشت. راه حل این مساله را، می‌توان روی شکل نشان داد. هر یک از ۶ نفر را با یک نقطه و بستگی بین آن‌ها را، با پاره‌خط‌های راستی که دو به دوی این نقطه‌ها را به هم پیوسته‌اند، نشان می‌دهیم: اگر دو نفر با هم آشنا باشند، با پاره‌خط راست کامل و اگر یکدیگر را نشناسند، با پاره‌خط راست نقطه‌چین (شکل ۶۵).

شکل‌هایی مثل شکل ۶۵ (الف یا ب) را، در ریاضیات، **گراف** گویند. هر یک از نقطه‌ها، یک راس و هر یک از پاره‌خط‌های راست، یک **یال** گراف هستند.



شکل ۶۵

اگر سه نفر، دو به دو، با هم آشنا باشند، در گراف، مثلثی را تشکیل می‌دهند که ضلع‌های آن، پاره‌خط‌های راست کامل است (نقطه‌های A و B و C در (شکل ۶۵ـب) و اگر دو به دو با هم ناآشنا باشند، مثلثی را تشکیل می‌دهند که، ضلع‌های آن، با پاره‌خط‌های راست نقطه‌چین نشان داده شده‌اند (سه نقطه A و B و C در شکل ۶۵ـالف).

نقطه‌ای از گراف، مثل M را در نظر می‌گیریم. بی‌تردید، سه‌نقطه پیدا می‌شود که یا هر سه با خط‌های کامل به M وصل شده‌اند و یا هر سه با خط‌های نقطه‌چین. در واقع، به جز M، پنج نقطهٔ دیگر وجود دارد؛ بنابراین، اگر کمتر از سه نقطه با خط‌های کامل به M وصل شده باشند، به معنای آن است که، دست‌کم، سه نقطه با خط‌های نقطه‌چین با M بستگی دارند و برعکس. در شکل ۶۵، نقطه‌های A، B و C را، در حالتی فرض کرده‌ایم که با خط‌های کامل به M وصل شده‌اند (و این، به کلی بودن استدلال ما لطمه‌ای نمی‌زند)؛ یعنی فرض کرده‌ایم، هر سه نفر A، B و C با M آشنا هستند.

اکنون، روشن است که، اگر، بین A و B و C، دو نقطه پیدا نشود که

با خط کامل به هم وصل شده باشند (شکل ۶۵_الف)، به معنای آن است که A و B و C، سه نفری هستند که، هیچ کدام از آنها، با دو نفر دیگر آشنا نیست. ولی اگر تنها دو نقطه از سه نقطهٔ A و B و C با خط کامل به هم وصل شده باشند، آن وقت آن دو نقطه، همراه با M، سه نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند که، دو به دو، با خط کامل به هم وصل شده‌اند (یعنی A و B و C، دو به دو، با هم آشنا هستند).

همین قدر یادآوری می‌کنیم که، با استدلالی ظریف‌تر، می‌توان ثابت کرد، در بین این ۶ نفر، دست کم دو گروه سه نفری وجود دارد، به نحوی که در هر گروه، یا همه یکدیگر را می‌شناسند و یا هیچ کدام را نمی‌شناسند. به عنوان نمونه، در شکل ۶۵_الف، در گروه سه نفری (A, B, C) و (M, B, N) و در شکل ۶۵_ب، دو گروه سه نفری (A, B, C) و (A, N, P).

۲۹. به ترتیب داریم:

$$a + b + c - ab - ac - bc + abc =$$
$$= (abc - ab) + (b - bc) + (a - ac) + (c - ۱) + ۱ =$$
$$= -ab(۱ - c) + b(۱ - c) + a(۱ - c) - (۱ - c) + ۱ =$$
$$= (۱ - c)(-ab + b + a - ۱) + ۱ =$$
$$= (۱ - c)[b(۱ - a) - (۱ - a)] + ۱ =$$
$$= (۱ - c)(۱ - a)(b - ۱) + ۱ =$$
$$= ۱ - (۱ - a)(۱ - b)(۱ - c)$$

a و b و c، هیچ کدام از ۱ بزرگتر نیستند، بنابراین عبارت

$$(۱ - a)(۱ - b)(۱ - c)$$

همیشه غیر منفی و مقدار عبارت ما، نمی‌تواند از ۱ بزرگتر باشد. حداکثر

مقدار عبارت ما برابر است با ۱ و وقتی به دست می‌آید که دست کم یکی از عددهای a، b یا c برابر واحد باشد.

۳۰. مجموع عددهای سه راس هر مثلث برابر است با ۶، پس مجموع عددها در راس‌های n مثلث برابر $6n$ می‌شود و بر ۶ بخش‌پذیر است.

از طرف دیگر، اگر در هر یال منشور، مجموع عددها برابر ۵۵ باشد، مجموع عددها در سه یال منشور، برابر

$$۵۵ \times ۳ = ۱۶۵$$

می‌شود که بر ۶ بخش‌پذیر نیست.

پاسخ مساله، منفی است.

۳۱. به این اتحادهای ساده توجه کنید:

$$\frac{۲}{x^۲ - ۱} = \frac{۱}{x - ۱} - \frac{۱}{x + ۱};$$

$$\frac{۴}{x^۲ - ۴} = \frac{۱}{x - ۲} - \frac{۱}{x + ۲};$$

$$\frac{۶}{x^۲ - ۹} = \frac{۱}{x - ۳} - \frac{۱}{x + ۳};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{۲۰}{x^۲ - ۱۰۰} = \frac{۱}{x - ۱۰} - \frac{۱}{x + ۱۰}$$

بنابراین، عبارت سمت چپ برابری مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$\left[\frac{۱}{x - ۱} - \frac{۱}{x + ۱۰}\right] + \left[\frac{۱}{x - ۲} - \frac{۱}{x + ۹}\right] + \ldots +$$
$$+ \left[\frac{۱}{x - ۱۰} - \frac{۱}{x + ۱}\right] =$$

$$= \frac{11}{(x-1)(x+10)} + \frac{11}{(x-2)(x+9)} + \ldots + \frac{11}{(x-10)(x+1)} =$$

$$= 11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \ldots + \frac{1}{(x-10)(x+1)}\right]$$

۳۲. کافی است به این نکته توجه کنیم که

$$53 + 96 = 83 + 66 = 109 + 40 = 149$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$x = 149, \quad a = 53, \quad b = 83, \quad c = 109$$

در این صورت، عدد مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$abc + (x-a)(x-b)(x-c)$$

که اگر پرانتزها را در هم ضرب و، سپس ساده کنیم، چنین می‌شود:

$$x[x^2 - (a+b+c)x + (ab+ac+bc)]$$

بنابراین، عدد مفروض بر $x = 149$ بخش‌پذیر است و عددی اول نیست.

۳۳. با توجه به شرط مساله، یعنی

$$M = b^2 - a^2 = d^2 - c^2;$$
$$d - c = \frac{M}{c+d}, b - a = \frac{M}{a+b}$$

به ترتیب داریم:

$$
\begin{aligned}
&۲(a+b)(c+d)(ac+bd-M)= \\
&=(a+b)(c+d)(۲ac+۲bd-۲M)= \\
&=(a+b)(c+d)(۲ac+۲bd-(b^۲-a^۲)-(d^۲-c^۲)= \\
&=(a+b)(c+d)[(a+c)^۲-(b-d)^۲]= \\
&=(a+b(c+d)(a+b+c-d)(a-b+c+d)= \\
&=(a+b)(c+d)\left(a+b-\frac{M}{c+d}\right)\left(c+d-\frac{M}{a+b}\right)= \\
&=(a+b)(c+d)\left[(a+b)(c+d)-۲M+\frac{M^۲}{(a+b)(c+d)}\right]= \\
&=[(a+b)(c+d)]^۲-۲M(a+b)(c+d)+M^۲= \\
&=[(a+b)(c+d)-M]^۲
\end{aligned}
$$

۳۴. با توجه به فرض

$$a^۲=(b+c)^۲, b^۲=(a+c)^۲, c^۲=(a+b)^۲$$

عبارت $a^۴+b^۴+c^۴$ را تبدیل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
a^۴+b^۴+c^۴ &= a^۲\cdot a^۲+b^۲\cdot b^۲+c^۲\cdot c^۲= \\
&=a^۲(b+c)^۲+b^۲(a+c)^۲+c^۲(a+b)^۲= \\
&=۲(a^۲b^۲+b^۲c^۲+a^۲c^۲)+۲abc(a+b+c)= \\
&=۲(a^۲b^۲+b^۲c^۲+a^۲c^۲)= \\
&=(a^۲+b^۲+c^۲)^۲-(a^۴+b^۴+c^۴)
\end{aligned}
$$

(توجه کنید: بنابر فرض داریم $a+b+c=۰$)

به این ترتیب، به دست آوردیم:

$$a^۴ + b^۴ + e^۴ = (a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ - (a^۴ + b^۴ + c^۴)$$

که اگر پرانتز دوم سمت راست برابری را به سمت چپ ببریم، به دست می‌آید:

$$۲(a^۴ + b^۴ + c^۴) = (a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲$$

و این، همان چیزی است که لازم داشتیم.

۳۵. نه! انوشه و روزبه با هم به شهر B نمی‌رسند. در واقع، اگر فاصلهٔ از شهر A تا شهر B را، برابر a کیلومتر بگیریم، انوشه به اندازهٔ

$$\frac{\frac{۱}{۲}a}{۶۰} + \frac{\frac{۱}{۲}a}{۸۰} = \frac{a}{۱۲۰} + \frac{a}{۱۶۰} = \frac{۷}{۴۸۰}a \text{ (ساعت)}$$

و روزبه به اندازهٔ

$$\frac{a}{۷۰} = \frac{۱}{۷۰}a \text{ (ساعت)}$$

در راه بوده است. عددهای $\frac{۷}{۴۸۰}$ و $\frac{۱}{۷۰}$ با هم برابر نیستند:

$$\frac{۷}{۴۸۰} = \frac{۴۹}{۳۳۶۰} \text{ و } \frac{۱}{۷۰} = \frac{۴۸}{۳۳۶۰}$$

یعنی انوشه، به اندازهٔ $\frac{a}{۳۳۶۰}$ ساعت دیرتر از روزبه به شهر B می‌رسد.

برای پاسخ به پرسش دوم مساله، فرض می‌کنیم، انوشه باید در x کیلومتری شهر A، سرعت خود را عوض کند؛ یعنی برای این که با روزبه در یک زمان به B برسد، x کیلومتر را با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت و

بقیهٔ راه، یعنی $(a - x)$ کیلومتر را با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت برود. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{۶۰} + \frac{a - x}{۸۰} = \frac{a}{۷۰}$$

که بعد از ساده کردن، چنین می‌شود:

$$\frac{x}{۶} + \frac{a - x}{۸} = \frac{a}{۷}$$

دو طرف برابری را در ۷ × ۲۴ ضرب می‌کنیم:

$$۲۸x + ۲۱(a - x) = ۲۴a$$

و یا پس از عمل‌های ساده:

$$x = \frac{۳}{۷}a$$

مثلاً اگر فاصلهٔ بین دو شهر A و B را ۱۰۵ کیلومتر فرض کنیم، انوشه باید در فاصلهٔ $۱۰۵ \times \frac{۳}{۷}$، یعنی ۴۵ کیلومتری شهر A، سرعت خود را از ۶۰ به ۸۰ کیلومتر برساند (۴۵ کیلومتر را با سرعت ۶۰ و ۶۰ کیلومتر بقیه را با سرعت ۸۰) تا در یک زمان (یعنی بعد از یک ساعت و نیم از لحظهٔ حرکت) به شهر B برسند.

۳۶. کافی است به کمک عددهای ۱ تا ۹، یک مربع وفقی ۳ × ۳ بسازیم (شکل ۶۶). می‌توان بطری‌های شیر را، به صورت سه سطر یا سه ستون این جدول بین سه خانواده تقسیم کرد: هر خانواده صاحب سه بطری و ۱۵ لیتر شیر می‌شود.

یادداشت. مربع وفقی یا مربع جادویی، به مربعی گویند که دارای $n \times n$ خانه باشد؛ در ضمن $n^۲$ عدد طبیعی را طوری در خانه‌های آن قرار داده

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

شکل ۶۶

باشند که، مجموع عددهای هر سطر با مجموع عددهای هر ستون و هر قطر برابر باشد. شکل ۶۶ ، یک مربع وفقی ۳ × ۳ را نشان می‌دهد که، مجموع عددها، در هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۵ است.

مربع‌های وفقی از هزاران سال پیش و در بین بیشتر ملت‌ها شناخته شده بوده، ولی در گذشته‌های دور، بیشتر به منظورهای بی‌پایهٔ جادوگری و فال‌بینی به کار می‌رفته است. در زمان ما، از مربع‌های وفقی می‌توان به عنوان وسیله‌ای برای سرگرمی با عددها استفاده کرد.

۳۷. این نابرابری، به ازای عددهای دلخواه a و b، همیشه برقرار است:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (1)$$

زیرا، اگر $2ab$ را به سمت چپ نابرابری ببریم، به نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

اگر پرانتزها را در عبارت صورت مساله، در هم ضرب کنیم، همهٔ توان‌های زوج x، از ۱ تا x^{202} به دست می‌آید (روی هم ۱۰۲ جمله). این نابرابری‌ها را، که شبیه نابرابری (۱) هستند، می‌نویسیم:

$$1 + x^{202} \geq 2x^{101}$$

$$x^{۲} + x^{۲۰۰} \geq ۲x^{۱۰۱}$$
$$x^{۴} + x^{۱۹۸} \geq ۲x^{۱۰۱}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{۱۰۰} + x^{۱۰۲} \geq ۲x^{۱۰۱}$$

که از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$۱ + x^{۲} + x^{۴} + \ldots + x^{۲۰۰} + x^{۲۰۲} \geq ۱۰۲x^{۱۰۱}$$

و یا

$$(۱ + x^{۲} + x^{۴} + \ldots + x^{۱۰۰})(۱ + x^{۱۰۲}) - ۱۰۲x^{۱۰۱} \geq ۰$$

۳۸. به این معادله توجه کنید:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = ۰ \qquad (۱)$$

حاصل ضرب سه پرانتز، تنها وقتی می‌تواند برابر صفر باشد، که دست کم یکی از پرانتزها برابر صفر شود، یعنی

$$x - a = ۰ \text{ یا } x - b = ۰ \text{ یا } x - c = ۰$$

که از آن‌جا، سه ریشهٔ معادلهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$x_{۱} = a, x_{۲} = b, x_{۳} = c$$

($x_{۱}$، یعنی جواب اول؛ $x_{۲}$، یعنی جواب دوم و $x_{۳}$، یعنی جواب سوم معادله. در ضمن، جواب هر معادله را، ریشهٔ آن معادله گویند.)

معادلهٔ (۱) را، بعد از ضرب پرانتزها در یکدیگر، می‌توان این طور نوشت:

$$x^{3} - (a+b+c)x^{2} + (ab+ac+bc)x - abc = 0 \qquad (2)$$

معادله‌های (۱) و (۲)، یکی هستند، یعنی ریشه‌های معادلهٔ (۲)، همان ریشه‌های معادلهٔ (۱) است.

اکنون روشن است، اگر بدانیم:

$$\begin{cases} a+b+c = a'+b'+c', \\ ab+ac+bc = a'b'+a'c'+b'c', \\ abc = a'b'c' \end{cases}$$

به معنای آن است که، دو معادلهٔ زیر، با هم تفاوتی ندارند:

$$\begin{cases} x^{3} - (a+b+c)x^{2} + (ab+ac+bc)x - abc = 0 \\ x^{3} - (a'+b'+c')x^{2} + (a'b'+a'c'+b'c')x - a'b'c' = 0 \end{cases}$$

یعنی ریشه‌های دو معادله یکسان است و مجموعه‌های

$\{a, b, c\}$ و $\{a', b', c'\}$

یکی هستند.

اکنون دیگر حل تمرین ۳۸ دشوار نیست. با آزمایش و به سادگی معلوم می‌شود که:

$$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3,$$

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3$$

و بنا به فرض مساله

$$u_1u_2u_3 = v_1v_2v_3$$

و بنابراین

$$\{u_۱, u, u_۳\} = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$$

۳۹. در آغاز به این نکته توجه کنیم که عدد پنج رقمی

$$۹۹۹۹۹$$

بر ۴۱ بخش‌پذیر است:

$$۹۹۹۹۹ = ۳^۲ \times ۴۱ \times ۲۷۱$$

اکنون عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، بر ۴۱ بخش‌پذیر باشد. نخستین عددی که از تبدیل دوری رقم‌های این عدد به دست می‌آید، چنین است:

$$\overline{bcdea}$$

که آن را می‌توان، این طور تبدیل کرد:

$$\overline{bcdea} = ۱۰\overline{bcde} + a + (۱۰۰۰۰۰a - ۱۰۰۰۰۰a) =$$
$$= ۱۰\overline{abcde} - ۹۹۹۹۹a$$

هم عدد $\overline{abcde}$ (بنا به فرض) و هم عدد ۹۹۹۹۹ (بنا به توضیح بالا) بر ۴۱ بخش‌پذیرند، بنابراین تفاضل

$$۱۰\overline{abcde} - ۹۹۹۹۹a$$

یعنی $\overline{bcdea}$ هم بر ۴۱ بخش‌پذیر می‌شود.

یادداشت. در این مساله می‌شد، به جای ۴۱، از عدد ۲۷۱ استفاده کنند: *اگر یک عدد پنج رقمی بر ۲۷۱ بخش‌پذیر باشد، هر عدد پنج‌رقمی*

دیگری هم، که از تبدیل دُوری این عدد به دست آید، بر ۲۷۱ بخش‌پذیر است.

۴۰. از برابری

$$a(b^۲ + ab + ۱) - b(a^۲ + ab + ۱) = a - b$$

روشن می‌شود که چون $b^۲ + ab + ۱$ و $a^۲ + ab + ۱$ بر $b^۲ + ab + ۱$ بخش‌پذیرند، باید تفاضل سمت چپ برابری و، در نتیجه، سمت راست آن، یعنی $a - b$، بر $b^۲ + ab + ۱$ بخش‌پذیر باشد و این، ممکن نیست، مگر در حالت $a - b = ۰$، یعنی $a = b$.

۴۱. اگر فرض کنیم:

$$x = ۵۱۲, y = ۶۷۵, z = ۷۲۰$$

با آزمایش روشن می‌شود که $۳xy = ۲z^۲$؛ از آن‌جا

$$۲z^۳ = ۳xyz$$

اکنون داریم:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = x^۳ + y^۳ - z^۳ + ۲z^۳ =$$
$$= x^۳ + y^۳ - z^۳ + ۳xyz =$$
$$= (x + y - z)(x^۲ + y^۲ + z^۲ - xy + xz + yz)$$

(برای آخرین تبدیل از اتحادی استفاده کرده‌ایم که در صفحهٔ ۱۸۷ جلد اول این دوره کتاب درسی دیده‌اید). به این ترتیب، عدد

$$۵۱۲^۳ + ۶۷۵^۳ + ۷۲۰^۳$$

بر $x + y - z$، یعنی ۴۶۷ بخش‌پذیر و عددی مرکب است. تمامی عدد، به این صورت قابل تجزیه است:

$$۲۲۹ \times ۴۶۷ \times ۷۶۲۱$$

۴۲. وقتی اولی ۲ مهرهٔ سیاه از جعبهٔ خود درمی‌آورد، باید بی‌تردید روی برچسب جعبهٔ او نوشته شده باشد «۲ سیاه و ۱ سفید»؛ چون می‌داند نوشتهٔ برچسب با درون جعبه فرق دارد، می‌اندیشد که در داخل جعبه باید یکی از سه حالت زیر باشد: ۱) «۲ سفید و ۱ سیاه»، ۲) «۳ سفید»، ۳) «۳ سیاه». ولی چون ۲ مهرهٔ سیاه بیرون آورده است، حالت‌های ۱) و ۲) نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ تنها حالت سوم می‌ماند:

در درون جعبهٔ اولی ۳ مهرهٔ سیاه وجود داشته است.

در ضمن، با اعلام اولی که «من ۲ مهرهٔ سیاه بیرون آورده‌ام و می‌توانم رنگ مهرهٔ باقی مانده را اعلام کنم»، سه نفر دیگر هم، از رنگ ۳ مهرهٔ درون جعبهٔ اولی (با همین استدلالی که در این‌جا آمد) آگاه می‌شوند.

روی برچسب جعبهٔ نفر دوم، بی شک نوشته بوده است: «۱ سیاه و ۲ سفید»، زیرا وقتی یک مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید بیرون آورده است، از یک طرف می‌داند در جعبهٔ او ۳ مهرهٔ سیاه نیست (چون این ۳ مهره در جعبهٔ اولی قرار داشت)، از طرف دیگر می‌داند در جعبهٔ او «۱ سیاه و ۲ سفید هم نیست» (چون محتوی جعبه با برچسب روی آن اختلاف دارد»؛ در ضمن در جعبهٔ او «۳ مهرهٔ سفید هم نمی‌تواند وجود داشته باشد (زیرا با ۳ مهرهٔ سفید، نمی‌شد ۱ سیاه و ۱ سفید از آن خارج کرد)؛ تنها این می‌ماند که مهره‌های داخل جعبه او «۲ سیاه و ۱ سفید» باشد و، بنابراین، رنگ مهرهٔ باقی‌مانده در جعبهٔ او، سیاه است:

در درون جعبهٔ دومی ۲ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سفید قرار دارد.

دو نفر باقی‌مانده هم، با استدلالی که پیش خود می‌کنند، به همهٔ این

نتیجه‌ها می‌رسند.

سومی به برچسب روی جعبه نگاه می‌کند، باید نوشته شده باشد «۳ سیاه»، زیرا، اگر برچسب جعبهٔ او «۳ سفید» را اعلام می‌کرد، چون ۲ مهرهٔ سفید بیرون آورده و چون می‌داند برچسب با درون جعبه فرق دارد، بلافاصله می‌فهمید در جعبه، تنها حالت ممکن، یعنی «۱ سیاه و ۲ سفید» است. ولی چون می‌گوید نمی‌توانم رنگ مهرهٔ باقی مانده را بگویم، باید روی برچسب جعبهٔ او نوشته شده باشد: «۳ سیاه».

و چهارمی که همهٔ این‌ها را می‌فهمد، به سادگی، هم به نوع مهره‌های درون جعبه و هم به نوشتهٔ روی برچسب جعبه خود پی می‌برد.

این تنها حالت ممکن را، که برای مهره‌ها و برچسب‌ها وجود دارد، در جدول زیر نشان داده‌ایم:

جعبه	۱	۲	۳	۴
برچسب‌ها	۲ سیاه ۱ سفید	۱ سیاه ۲ سفید	۳ سیاه	۳ سفید
مهره‌ها	۳ سیاه	۲ سیاه ۱ سفید	۳ سفید	۱ سیاه ۲ سفید

۱. دستگاه محورهای مختصات

۴۳. پاسخ. $A(۲)$، $B(-۸)$.

۴۴. پاسخ. اگر $a > ۰$، آن وقت $M(a)$ سمت راست $N(-a)$؛ اگر $a < ۰$، آن وقت $N(-a)$ سمت راست $M(a)$؛ اگر $a = ۰$، آن وقت $M(a)$ و $N(-a)$ بر هم منطبق‌اند.

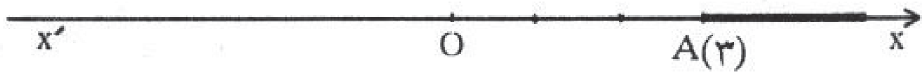
۴۵. *پاسخ‌ها.* الف) برای $x > ۰$، B سمت راست A؛ برای $x < ۰$، A سمت راست B؛ برای $x = ۰$، A و B منطبق بر هم؛

ب) C سمت راست D (برای هر مقدار a)؛

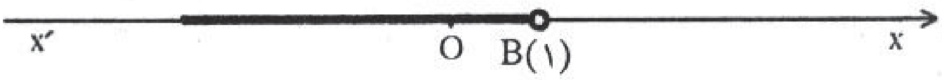
ج) برای $x > ۱$ یا $x < ۰$، N سمت راست M؛ برای $۰ < x < ۱$، M سمت راست N؛ برای $x = ۰$ یا $x = ۱$، M منطبق بر N؛

د) اگر $a > 0$، P سمت راست Q؛ اگر $a < 0$، Q سمت راست P؛ اگر $a = 0$، P منطبق بر Q؛

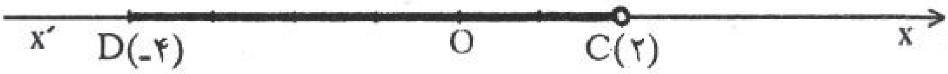
۴۶. پاسخ‌ها را در شکل ۶۷ ببینید.



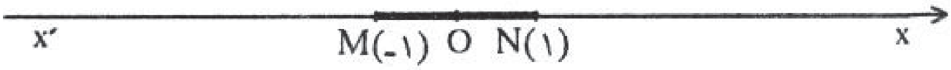
الف) نیم‌خط راست Ax



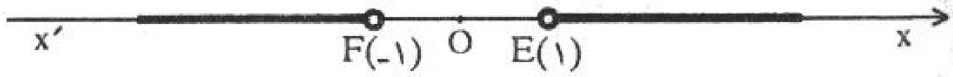
ب) نیم‌خط راست ´Bx، بدون خود نقطهٔ B



ج) پاره‌خط راست DC، با نقطهٔ D و بدون نقطهٔ C



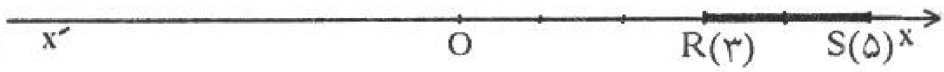
د) پاره‌خط راست MN



ه) دو نیم‌خط راست Ex و ´Fx، به‌جز نقطه‌های E و F



و) نیم‌خط‌های راست Px و ´Qx



ز) پاره‌خط راست RS

شکل ۶۷

۴۷. قرینهٔ نقطهٔ A را، نسبت به نقطهٔ B، $C(x)$ می‌نامیم. B باید وسط پاره‌خط راست AC باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$۲x_B = x_A + x_C \Rightarrow -۲ = ۵ + x$$

[نماد $\Rightarrow$ را بخوانید: «نتیجه می‌شود»]. از این‌جا، مقدار x، یعنی مختص نقطهٔ C به دست می‌آید: $x = -۷$.

۴۸. می‌دانیم، برای $a > ۰$ داریم: $|a| = a$ و برای $a < ۰$ داریم: $|a| = -a$. در مسالهٔ ما، a نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا تقسیم بر صفر، معنا ندارد. بنابراین

اگر $a > ۰$، آن وقت $\frac{|a|}{a} = ۱$ و اگر $a < ۰$، آن وقت $\frac{|a|}{a} = -۱$.

بنابراین نقطهٔ به مختص $\frac{|a|}{a}$، در یکی از دو نقطهٔ $A_۱(۱)$ یا $A_۲(-۱)$ قرار دارد.

۴۹. برای این که برابری $|x - ۱| = ۱ - x$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$x - ۱ \leq ۰ \Rightarrow x \leq ۱$$

بنابراین، نقطه‌های مورد نظر مساله، روی نیم‌خط راست Ax' قرار دارند که، در آن، $A(۱)$.

۵۰. پاسخ. $۲ < x_B < ۸$.

۵۱. نقطهٔ مجهول را $M(x)$ می‌گیریم. باید داشته باشیم

$$|MB| = ۲|MC| \Rightarrow |x_B - x_M| = ۲|x_C - x_M|$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$|-۳ - x| = ۲|-۹ - x| \Rightarrow |x + ۳| = ۲|x + ۹|$$

سه حالت در نظر می‌گیریم: ۱) $x \le -۹$، در این حالت $x + ۹ < ۰$ و $x + ۳ < ۰$ و به دست می‌آید:

$$-x - ۳ = -۲x - ۱۸ \Rightarrow x = -۱۵$$

$x = -۱۵$ قابل قبول است، زیرا با شرط این حالت، یعنی $x \le -۹$ سازگار است.

۲) $-۹ < x \le -۳$. در این حالت $x + ۳ < ۰$ و $x + ۹ > ۰$، پس

$$-x - ۳ = ۲x + ۱۸ \Rightarrow x = -۷$$

$x = -۷$ قابل قبول است، زیرا $-۳ > -۷ > -۹$.

۳) $x > -۳$. در این حالت $x + ۳ > ۰$ و $x + ۹ > ۰$، بنابراین

$$x + ۳ = ۲x + ۱۸ \Rightarrow x = -۱۵$$

$x = -۱۵$ قابل قبول نیست، زیرا با شرط $x > -۳$ سازگار نیست.

مساله دو جواب دارد: $M(-۱۵)$ و $M(-۷)$.

۵۲. اگر مختص B را x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$|x - ۲| = ۷ \Rightarrow x - ۲ = \pm ۷ \Rightarrow x = ۹ \text{ یا } -۵$$

بنابراین، برای مختص نقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست AB، داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = ۵\frac{۱}{۲} \text{ و } -۱\frac{۱}{۲}$$

پاسخ. $M\left(۵\frac{۱}{۲}\right)$ و $M\left(-۱\frac{۱}{۲}\right)$.



شکل ۶۸

۵۳. وسط پاره‌خط راست CB را D می‌نامیم و مختص نقطهٔ C را x می‌گیریم. چون C وسط AD است، پس

$$x_C = \frac{x_A + x_D}{۲} \Rightarrow x_D = ۲x - ۱$$

اکنون دو نقطهٔ C و B را در نظر می‌گیریم (شکل ۶۸). D وسط C و B است. پس

$$۲x_D = x_B + x_C = -۵ + x$$

و در نتیجه، به این معادله می‌رسیم:

$$۲(۲x - ۱) = -۵ + x \Rightarrow x = -۱$$

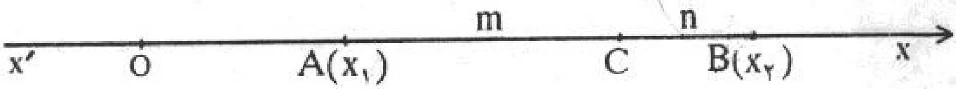
پاسخ. $C(-۱)$.

۵۴. به شکل ۶۹ توجه کنید. داریم:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{|AC|}{|AC| + |BC|} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow$$
$$\frac{|AC|}{x_۲ - x_۱} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow |AC| = \frac{m(x_۲ - x_۱)}{m+n}$$

از طرف دیگر، برای مختص نقطهٔ C به دست می‌آید:

$$|OC| = |OA| + |AC| = x_۱ + \frac{m(x_۲ - x_۱)}{m+n}$$



شکل ۶۹

و سرانجام به دست می‌آید:

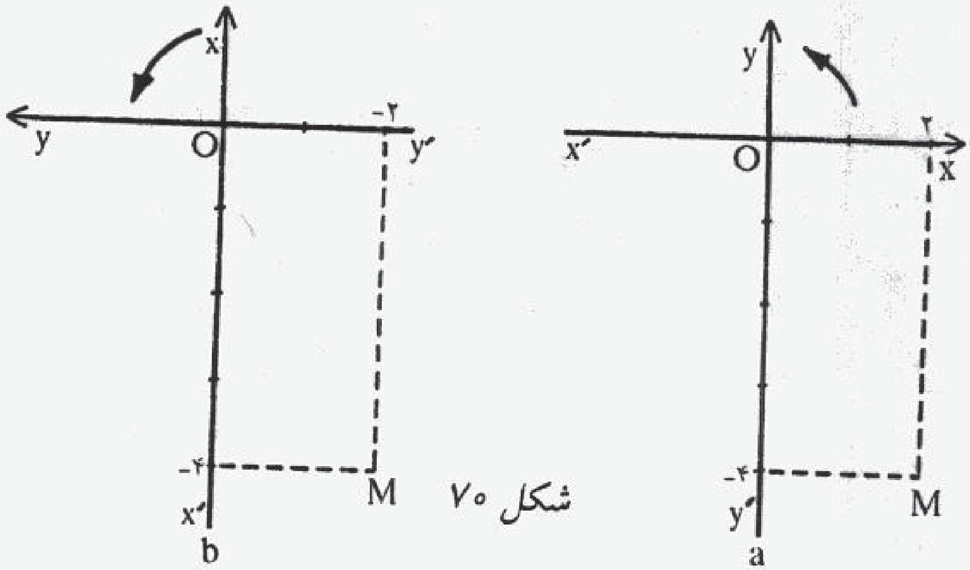
$$x_C = \frac{mx_۲ + nx_۱}{m+n} \qquad (*)$$

نقطهٔ C، پاره‌خط راست AB را، به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده است: m متناظر با $|AC|$ و n متناظر با $|CB|$ است (روی شکل، برای درک بهتر، m را روی AC و n را روی CB نوشته‌ایم؛ منظور طول این پاره‌خط‌های راست نیست، بلکه منظور جمله‌های نسبت است). برای پیدا کردن مختص نقطهٔ C، باید x_A را در n و x_B را در m (یعنی برای هر نقطه، در جمله‌ای از نسبت که مجاور دیگری است) ضرب و، سپس مجموع آن‌ها را بر $m+n$ (مجموع دو جملهٔ نسبت) تقسیم کرد.

یادداشت. سه نقطهٔ O، A و B، نسبت به هم، شش حالت مختلف می‌توانند داشته باشند. در این‌جا، تنها یکی از این شش حالت را در نظر گرفتیم: وقتی که A سمت راست O، و B سمت راست A باشد. برای کامل شدن حل، باید در هر یک از پنج حالت دیگر هم، مساله را مورد بررسی قرار داد. این پنج حالت را روی شکل‌های جداگانه بررسی کنید، خواهید دید، در هر حال، همان دستور $(*)$ به دست می‌آید.

برای این مساله، مثالی می‌آوریم.

مختص نقطهٔ C را پیدا کنید، به شرطی که پاره‌خط راست AB را به نسبت $\frac{۲}{۵}$ تقسیم کند و نزدیک‌تر به A باشد؛ در ضمن، می‌دانیم $A(۲)$ و $B(-۸)$.



شکل ۷۰

بنابر دستور (*) به دست می‌آید:

$$x_C = \frac{۵x_A + ۲x_B}{۵ + ۲} = \frac{۱۰ - ۱۶}{۷} = -\frac{۶}{۷}$$

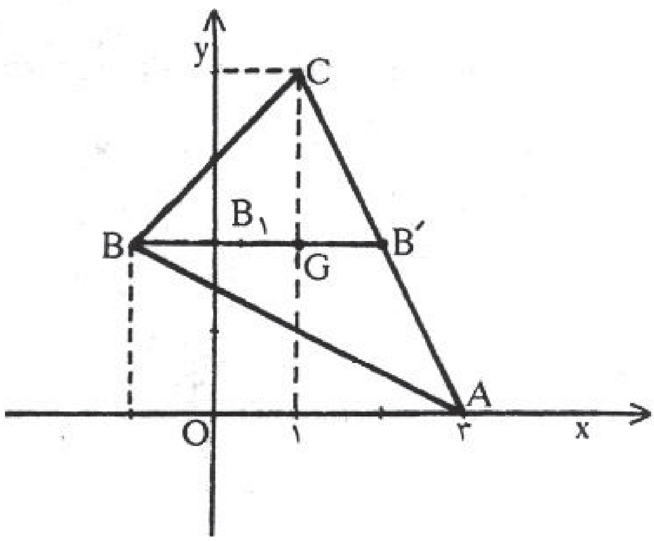
۵۵. پاسخ. اگر قرینهٔ A را نسبت به محور $x'x$، $A_۱$؛ نسبت به محور $y'y$، $A_۲$ و نسبت به O (مبداء مختصات)، $A_۳$ بنامیم، داریم:

$$A_۱(-۲, -۳), A_۲(۲, ۳), A_۳(۲, -۳)$$

۵۶. به شکل ۷۰ توجه کنید.

مواظب باشید اشتباه نکنید: جهت‌های مثبت محورها باید چنان باشد که اگر نیم‌خط راست Ox را به اندازهٔ ۹۰درجه، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، روی نیم‌خط راست oy قرار گیرد. بنابراین، وقتی محور y را به جای محور x و محور x را به جای محور y بگیریم، تبدیل به صورتی انجام می‌شود که در شکل ۷۰ نشان داده‌ایم (از دستگاه محورهای مختصات a)، به دستگاه محورهای مختصات b). در نتیجه، برای مختصات نقطهٔ M در دستگاه جدید خواهیم داشت: $M(-۴, -۲)$.

۵۷. برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌ها، از این ویژگی استفاده می‌کنیم که، میانه‌ها، در نقطهٔ یک سوم، یکدیگر را قطع می‌کنند؛



شکل ۷۱:

یعنی اگر BB' را یکی از میانه‌های مثلث ABC بگیریم (شکل ۷۱)، نقطهٔ G، محل برخورد میانه‌ها (که در ضمن گرانیگاه یا مرکز ثقل مثلث است)، طوری است که، برای آن، داریم:

$$|B'G| : |BG| = ۱ : ۲$$

طول نقطهٔ G را x می‌گیریم. اگر $B_۱$ قرینهٔ B' نسبت به G باشد، برای سه نقطهٔ B' و G و $B_۱$ باید داشته باشیم:

$$۲x_G = x_{B'} + x_{B_۱} \qquad (۱)$$

ولی B'، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AC است، بنابراین

$$x_{B'} = \frac{۱}{۲}(x_A + x_C) = \frac{۱}{۲}(۳ + ۱) = ۲$$

بنابراین، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$۲x = ۲ + x_{B_۱} \Rightarrow x_{B_۱} = ۲x - ۲ \qquad (۲)$$

$B_۱$ وسط پاره‌خط راست BG است، یعنی

$$۲x_{B_۱} = x_B + x_G \Rightarrow ۲(۲x - ۲) = -۱ + x$$

که از آن‌جا، مقدار x (طول نقطهٔ G) به دست می‌آید: $x = ۱$. به همین ترتیب، عرض نقطهٔ G هم به دست می‌آید.

پاسخ. $G(۱, ۲)$.

یادداشت. سه راس مثلث را، نقطه‌های

$$A(x_۱, y_۱), B(x_۱, y_۲), C(x_۳, y_۳)$$

بگیرید و با همان روش مسالهٔ ۵۷، مختصات نقطهٔ G، محل برخورد میانه‌های آن را پیدا کنید، به این پاسخ می‌رسید:

$$G \left| \begin{array}{l} x = \frac{۱}{۳}(x_۱ + x_۲ + x_۳) \\ y = \frac{۱}{۳}(y_۱ + y_۲ + y_۳) \end{array} \right. \qquad (۳)$$

مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌های یک مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۳}$ *مجموع مختصات سه راس آن.* از دستور (۳) می‌توان در حل مساله‌ها استفاده کرد.

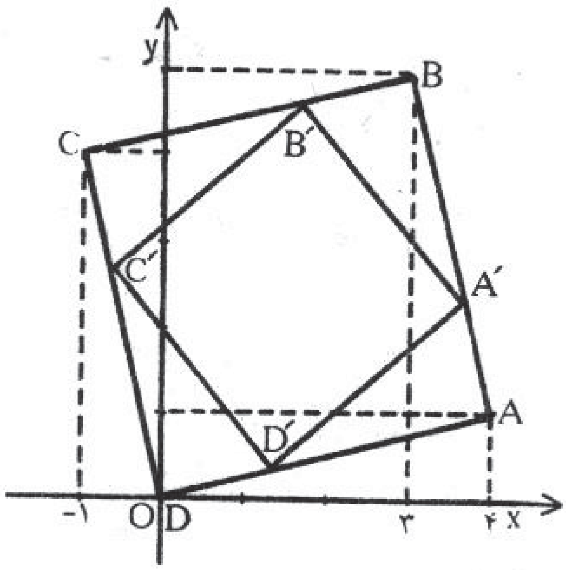
۵۸. در شکل ۷۲، چهارضلعی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ رسم شده‌اند. برای اثبات مربع بودن چهار ضلعی $ABCD$، کافی است ثابت کنیم، طول ضلع‌ها با هم، و طول قطرها با هم برابرند.

برای ضلع‌ها داریم:

$$|AB|^۲ = (۴ - ۳)^۲ + (۱ - ۵)^۲ = ۱۷;$$
$$|BC|^۲ = (۳ + ۱)^۲ + (۵ - ۴)^۲ = ۱۷;$$
$$|CD|^۲ = (-۱)^۲ + ۴^۲ = ۱۷; |DA|^۲ = ۴^۲ + ۱^۲ = ۱۷$$

و برای طول قطرها:

$$|AC|^۲ = ۳۴; \quad |BD|^۲ = ۳۴$$



شکل ۷۲

$A'B'C'D'$ هم یک مربع است. برای اثبات، در آغاز باید مختصات نقطه‌های A'، B'، C' و D' را پیدا کرد.

طول نقطهٔ A' را x و قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ A' را $A_۱$ می‌گیریم ($A_۱$ روی شکل نشان داده نشده است). به دست می‌آید:

$$x_{A_۱} = ۲x - ۴$$

ولی $A_۱$ وسط پاره‌خط راست $A'B$ است، پس

$$۲x_{A_۱} = x_{A'} + x_B \Rightarrow ۲(۲x - ۴) = x + ۳$$

از آن‌جا، مقدار x، یعنی طول نقطهٔ A' به دست می‌آید

$$x_{A'} = \frac{۱۱}{۳}$$

به همین ترتیب، عرض نقطهٔ A' به دست می‌آید:

$$A'\left(\frac{۱۱}{۳}, \frac{۷}{۳}\right)$$

با همین روش، مختصات نقطه‌های B'، C' و D' را به دست آورید و، سپس آزمایش کنید که

$$|A'B'| = |B'C'| = |C'D'| = |D'A'| \text{ و } |A'C'| = |B'D'|$$

۵۹. هر یک از دو راس دیگر مربع، راس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی است که پاره‌خط راست AB وتر آن را تشکیل می‌دهد. یکی از این راس‌ها را $C(x, y)$ می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$|CA| = |CB| \text{ و } |CA|^۲ + |CB|^۲ = |AB|^۲$$

که آن‌ها را به این ترتیب هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |CA|^۲ = |CB|^۲ \\ ۲|CB|^۲ = |AB|^۲ \end{cases} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$|CA|^۲ = (x + ۱)^۲ + (y - ۴)^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲x - ۸y + ۱۷;$$
$$|CB|^۲ = (x - ۳)^۲ + (y - ۱) = x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۱۰;$$
$$|AB|^۲ = (۳ + ۱)^۲ + (۱ - ۴)^۲ = ۲۵$$

بنابراین، با توجه به (۱) به دو برابری زیر می‌رسیم (پس از ساده کردن):

$$\begin{cases} ۸x - ۶y + ۷ = ۰ \\ ۲(x - ۳)^۲ + ۲(y - ۱)^۲ = ۲۵ \end{cases}$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید:

$$y = \frac{۸x + ۷}{۶} \qquad (۲)$$

در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$2(x-3)^2 + 2\left(\frac{8x+7}{6} - 1\right)^2 = 25$$

این معادله، بعد از عمل‌های لازم، به این صورت درمی‌آید:

$$4x^2 - 8x - 5 = 0$$

سمت چپ این معادله قابل تجزیه است:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x - 5 &= (4x^2 - 8x + 4) - 9 = \\ &= (2x-2)^2 - 9 = (2x - 2 + 3)(2x - 2 - 3) = \\ &= (2x+1)(2x-5) \end{aligned}$$

از آن‌جا $x_1 = -\frac{1}{2}$ یا $x_2 = \frac{5}{2}$. با قرار دادن هر یک از این دو مقدار رابطهٔ (۲)، برای y به دست می‌آید: $y_1 = \frac{1}{2}$ و $y_2 = \frac{9}{2}$.

پاسخ. $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $D\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ دو راس دیگر مربع‌اند.

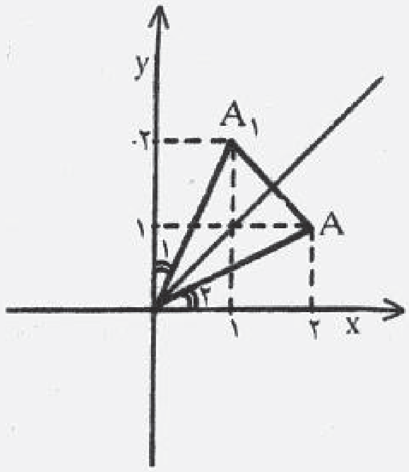
۶۰. *راهنمائی*. شبیه مسالهٔ قبل، از این برابری‌ها استفاده کنید:

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AC|^2 \\ |BC^2| = 2|AB|^2 \end{cases} \qquad (1)$$

مختصات راس C را (x, y) بگیرید و برابری‌های (۱) را، بر حسب x و y بنویسید.

پاسخ. مساله دو پاسخ دارد: $C_1\left|\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right.$ و $C_2\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$

۶۱. در آغاز به این نکته توجه کنید: اگر نقطه‌ای در ربع اول یا سوم باشد، آن وقت قرینهٔ آن نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم، در همان ربعی



شکل ۷۳

قرار می‌گیرند که در ابتدا بود، یعنی قرینهٔ نقطه‌ای از ربع اول، نسبت به نیمساز ربع اول، در ربع اول باقی می‌ماند و همین طور برای ربع سوم. ولی اگر نقطه‌ای در ربع دوم یا چهارم باشد و بخواهیم قرینهٔ آن را نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم پیدا کنیم، از ربع سوم به ربع چهارم و از ربع چهارم به ربع سوم منتقل می‌شود.

همین وضع دربارهٔ قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ربع‌های دوم و چهارم وجود دارد.

از طرف دیگر، اگر A_1 قرینهٔ A نسبت به نیمساز ربع اول باشد (شکل ۷۳)، به سادگی ثابت می‌شود:

$$|x_A| = |y_{A_1}| \text{ و } |y_A| = |x_{A_1}|$$

با توجه به این نکته‌ها، داریم:

اگر A_1 و A_2، به ترتیب، قرینه‌های A نسبت به نیمساز ربع‌ها اول و سوم و نیمساز ربع‌های دوم و چهارم، و B_1 و B_2 قرینه‌های B نسبت به همین نیمسازها باشند، آن وقت

$$A_1\Big|_{2}^{1},\ A_2\Big|_{-2}^{-1},\ B_1\Big|_{-3}^{2},\ B_2\Big|_{3}^{-2}$$

۶۲. برای هر دو حالت الف) و ب)، باید طول‌های پاره‌خط‌های راست AB، BC و AC را پیدا کرد: الف) وقتی سه نقطهٔ A و B و C روی یک خط راست‌اند که، از طول‌های سه پاره‌خط راستی که به دست آورده‌ایم، مجموع طول‌های دو پاره‌خط، با طول پاره‌خط سوم، برابر باشد (بگویید چرا؟). ب) دو انتهای پاره‌خط راستی که بزرگترین طول را دارد، در دو طرف نقطهٔ سوم قرار دارند.

مثال. *آیا نقطه‌های $A(۱,۰)$، $B(-۱,-۲)$ و $C(۴,۳)$ روی یک خط راست‌اند؟ اگر پاسخ مثبت است، کدام نقطه بینِ دو نقطهٔ دیگر واقع است؟*

طول پاره‌خط‌های راست را محاسبه می‌کنیم:

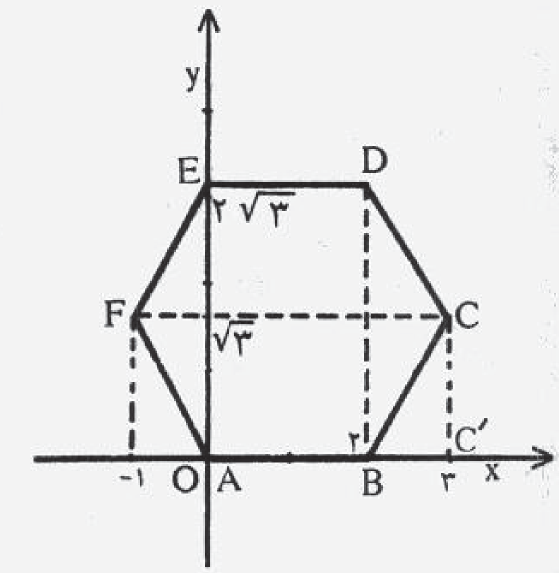
$$|AB| = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (۰+۲)^۲} = ۲\sqrt{۲};$$
$$|AC| = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (۰-۳)^۲} = ۳\sqrt{۲};$$
$$|BC| = \sqrt{(۴+۱)^۲ + (۳+۲)^۲} = ۵\sqrt{۲}$$

می‌بینیم $|BC| = |AB| + |AC|$، پس سه نقطه روی یک خط راست‌اند و چون پاره‌خط راست BC، بزرگترین طول را دارد، بنابراین نقطهٔ A بین دو نقطهٔ B و C واقع است.

۶۳. می‌دانیم، در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، یعنی نقطهٔ برخورد دو قطر OB و AC، از یک طرف وسط پاره‌خط راست OB و از طرف دیگر، وسط پاره‌خط راست AC است. مختصات راس B را (x,y) می‌گیریم، در این صورت، باید داشته باشیم

$$\begin{cases} x_O + x_B = x_A + x_C \\ y_O + y_B = y_A + y_C \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x = ۵$ و $y = ۵$.



شکل ۷۴

پاسخ. $B(۵,۵)$.

۶۴. در مثلث BCC' (شکل ۷۴)، زاویهٔ C برابر ۳۰ درجه است، بنابراین

$$|BC'| = \frac{۱}{۲}|BC| = ۱,$$
$$|CC'| = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

بنابراین $C(۳, \sqrt{۳})$. با همین روش، مختصات نقطهٔ F به دست می‌آید: $F(-۱, \sqrt{۳})$. با توجه به شکل ۷۳ روشن است که

$$y_D = y_E = ۲y_C = ۲\sqrt{۳}$$
$$x_D = x_B = ۲,$$
$$x_E = x_A = ۰$$

پاسخ. $C|^{۳}_{\sqrt{۳}}$، $D|^{۲}_{۲\sqrt{۳}}$، $E|^{۰}_{۲\sqrt{۳}}$ و $F|^{-۱}_{\sqrt{۳}}$.

۶۵. اگر راس مقابل A را C بنامیم، باید داشته باشیم:

$$x_A + x_C = ۲x_F \text{ و } y_A + y_C = ۲y_F$$

از آن‌جا به دست می‌آید: $C(۷, -۴)$.

اکنون مختصات دو سر یک قطر مربع را در دست دارید و می‌توانید شبیه مسالهٔ ۵۹، مختصات دو راس دیگر مربع را به دست آورید.

پاسخ. $B(۰, -۵)$، $C(۷, -۴)$، $D(۶, ۳)$.

۶۶. *راهنمائی.* برای راس B (و همچنین D) باید داشته باشیم:

$$|BA| = |BC| = \sqrt{۵}$$

پاسخ. $B(۰, ۵)$، $D(-۳, ۲)$.

۶۷. *راهنمائی.* M را به مختصات (x, y) و A' را قرینهٔ A نسبت به M بگیرید؛ در این صورت M' وسط پاره‌خط راست MB است.

پاسخ. $M\left(-۱, \frac{۸}{۳}\right)$.

۶۸. مختصات نقطه M را (x, y) می‌گیریم. دو مثلث MAA' و MBB' متشابه‌اند (شکل ۷۵) و داریم:

$$\frac{|AA'|}{|MB'|} = \frac{|AM|}{|MB|}$$

در ضمن روشن است که

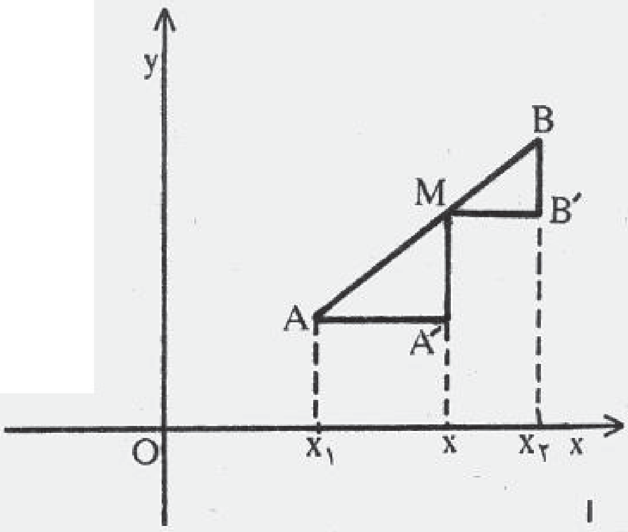
$$|AA'| = x - x_۱, |MB'| = x_۲ - x$$

بنابراین به دست می‌آید:

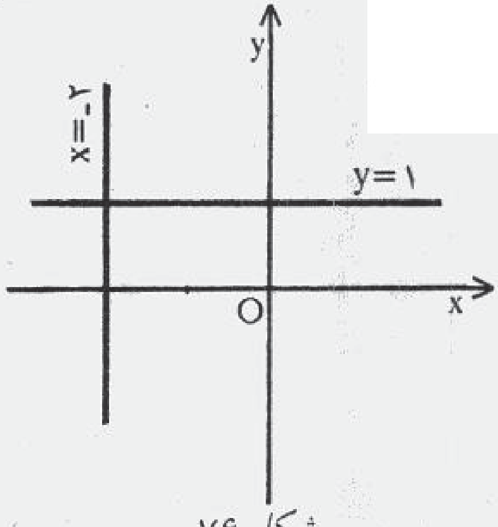
$$\frac{x - x_۱}{x_۲ - x} = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{nx_۱ + mx_۲}{m + n}$$

به همین ترتیب، عرض نقطهٔ M هم به دست می‌آید.

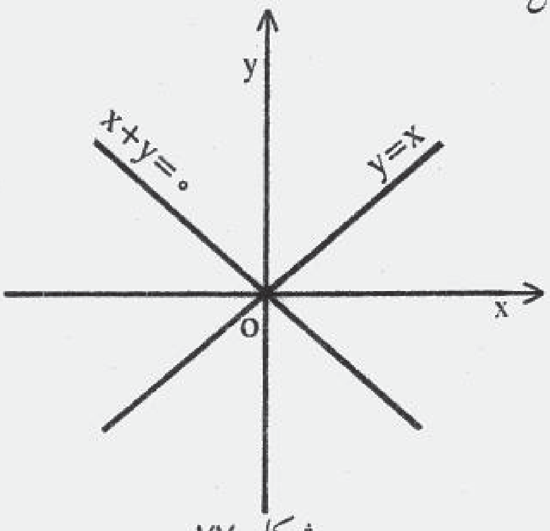
پاسخ. $M\left(\frac{nx_۱ + mx_۲}{m + n}, \frac{ny_۱ + my_۲}{m + n}\right)$



شکل ۷۵



شکل ۷۶



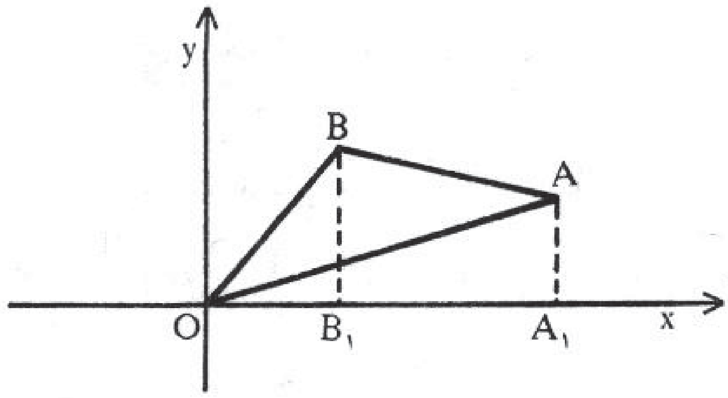
شکل ۷۷

۶۹. الف) این نقطه‌ها، روی خط راستی موازی محور عرض قرار دارند؛ این خط راست، محور طول را در نقطهٔ (۰، ۲−) قطع می‌کند (شکل ۷۶).

ب) این نقطه‌ها، روی خط راستی موازی محور طول و به فاصله‌ای برابر ۱ از آن، در بالای محور طول قرار دارند (شکل ۷۶).

ج) همهٔ نقطه‌های واقع بر نیمساز ربع‌های اول و سوم (شکل ۷۷).

د) همهٔ نقطه‌هایی که طول و عرض آن‌ها، قرینهٔ یکدیگرند، یعنی همهٔ نقطه‌های واقع بر نیمساز ربع‌های دوم و چهارم (شکل ۷۷).



شکل ۷۸:

۷۰. اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OBB_1 را S_1، مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ BB_1A_1A را S_2 و مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAA_1 را S_3 بنامیم، به سادگی به دست می‌آید (شکل ۷۸):

$$S_1 = \frac{1}{2}x_2y_2, S_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2), S_3 = \frac{1}{2}x_2y_2$$

بنابراین، اگر مساحت مثلث OAB را S بگیریم، داریم:

$$S = S_1 + S_2 - S_3 =$$
$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}x_2y_2 =$$

که پس از ساده کردن، خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2| \qquad (*)$$

علامت قدر مطلق را، به این مناسبت گذاشته‌ایم که بر مثبت بودن مقدار مساحت تاکید کرده باشیم.

در شکل ۷۸. نقطه‌های A و B را در ربع اول دستگاه محورهای مختصات گرفتیم؛ شما روی شکل‌های دیگری که می‌توانند وجود داشته

باشند، آزمایش کنید، همه‌جا برای مساحت مثلث OAB، همین دستور $(*)$ به دست می‌آید.

۷۱. این مساله، حالت خاصی از مسالهٔ ۶۲ است. داریم:

$$|AB| = ۳\sqrt{۵}, |AC| = \sqrt{۵}; |BC| = ۲\sqrt{۵}$$

می‌بینیم $|AB| = |AC| + |CB|$، یعنی سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست قرار دارند و نقطهٔ C، بین دو نقطهٔ A و B واقع است.

۷۲. مختصات نقطهٔ M را $(۰, y)$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$|MA|^۲ = |MB|^۲ \Rightarrow (y - a)^۲ = b^۲ + y^۲$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $y = \frac{a^۲ - b^۲}{۲ab}$.

پاسخ. $M\left(۰, \frac{a^۲ - b^۲}{۲ab}\right)$.

۷۳. راهنمائی. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OAB، باید از سه نقطهٔ O، A و B به یک فاصله باشد.

پاسخ. $\left(\frac{b}{۲}, \frac{a}{۲}\right)$.

۷۴. مختصات راس C را (x, y) می‌گیریم. باید توجه داشته باشیم:

$$|AB| = |AC| = |BC|$$

از برابری $|AC|^۲ = |BC|^۲$ به دست می‌آید:

$$y = \frac{۴x - ۳}{۲} \qquad (۱)$$

و از برابری $|BC|^۲ = |AB|^۲$:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \qquad (۲)$$

مقدار y را از (۱) در (۲) قرار می‌دهیم، بعد از عمل‌های لازم به دست می‌آید:

$$۴x^{۲} - ۸x + ۱ = ۰ \qquad (۳)$$

سمت چپ معادلهٔ (۳) را، به این ترتیب، تجزیه می‌کنیم:

$$۴x^{۲} - ۸x + ۱ = (۴x^{۲} - ۸x + ۴) - ۴ + ۱ =$$
$$= (۲x - ۲)^{۲} - ۳ = (۲x - ۲ - \sqrt{۳})(۲x - ۲ + \sqrt{۳}) = ۰$$

بنابراین، معادلهٔ (۳) دو جواب دارد:

$$x_{۱} = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲}, x_{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲}$$

از این‌جا، با استفاده از (۱)، مقدارهای y هم به دست می‌آیند.

پاسخ. برای راس C، دو جواب پیدا می‌شود:

$$C_{۱}\left(\frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱ + ۲\sqrt{۳}}{۲}\right) \text{ و } C_{۲}\left(\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱ - ۲\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

۷۵. نقطهٔ $\omega(x, y)$ را طوری پیدا می‌کنیم که از سه نقطهٔ A، B و C به یک فاصله باشد (ω، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است). از برابری $|\omega A|^{۲} = |\omega B|^{۲}$ به دست می‌آید:

$$۳x - y = ۶ \qquad (۱)$$

و از برابری $|\omega A|^{۲} = |\omega C|^{۲}$:

$$۳x + ۴y = -۹ \qquad (۲)$$

از معادله‌های (۱) و (۲)، با هم، جوابی برای (x, y) به دست می‌آید:

$$\omega(۱, -۳)$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که $|\omega A| = |\omega D|$.

$$|\omega A| = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (-۳-۱)^۲} = ۵;$$
$$|\omega D| = \sqrt{(۶-۱)^۲ + (-۳+۳)^۲} = ۵$$

یعنی دایرهٔ به مرکز $\omega(۱, -۳)$ و به شعاع برابر ۵، از چهار نقطهٔ A، B، C و D می‌گذرد.

۷۶. $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ می‌گیریم. در این صورت باید داشته باشیم:

$$x_۱ + x_۲ = -۲, x_۲ + x_۳ = ۲, x_۱ + x_۳ = ۶$$

از مجموع این سه معادله به دست می‌آید:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳$$

و با کم کردن هر یک از سه معادلهٔ بالا از معادلهٔ اخیر، خواهیم داشت:

$$x_۱ = ۱, x_۲ = -۳, x_۳ = ۵$$

به همین ترتیب، مقدارهای $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ هم به دست می‌آیند.

پاسخ. $A(۱, ۴)$، $B(-۳, ۰)$، $C(۵, -۲)$.

۷۷. *راهنمائی.* راس C را به مختصات $(۰, y)$ و نقطهٔ G محل برخورد میانه‌ها را به مختصات $(x, ۰)$ بگیرید و از این دستورها استفاده کنید (حل مسالهٔ ۵۷ را ببینید):

$$\begin{vmatrix} x_G = \frac{۱}{۳}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{۱}{۳}(y_A + y_B + y_C) \end{vmatrix}$$

پاسخ. $C(0,2)$ و $G(-1,0)$.

۷۸. اگر نقطه‌های A و B را در دستگاه محورهای مختصات پیدا کنیم، می‌بینیم، خط راست AB، محور $x'x$ را در نقطهٔ N بین A و B، و محور $y'y$ را در نقطهٔ M واقع در بیرون A و B (و نزدیک‌تر به A) قطع می‌کند. بنابراین باید داشته باشیم:

$$|AN| + |NB| = |AB|, \qquad (1)$$

$$|MA| + |AB| = |MB| \qquad (2)$$

اگر مختصات نقطهٔ N را $(x, 0)$ فرض کنیم، برابری (۱)، به این صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+1} = \sqrt{10}$$

که می‌توان آن را، این طور نوشت:

$$\sqrt{x^2-4x+5} = \sqrt{10} - \sqrt{x^2-2x+5}$$

اگر دو طرف برابری را به توان ۲ برسانیم، بعد از اندکی جابه‌جایی جمله‌ها، این معادله به دست می‌آید:

$$\sqrt{10(x^2-2x+5)} = x+5$$

دو طرف را دوباره به توان ۲ می‌رسانیم و، سپس، ساده می‌کنیم؛ سرانجام، به این برابری می‌رسیم:

$$9x^2 - 30x + 25 = 0 \Rightarrow (3x-5)^2 = 0$$

یعنی $x = \frac{5}{3}$. خط راست AB، محور $x'x$ را در نقطهٔ به طول $\frac{5}{3}$ قطع می‌کند: $N\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

به همین ترتیب، برابری (۲)، ما را به این معادله می‌رساند (y، عرض نقطهٔ M است).

$$\sqrt{y^۲ + ۴y + ۵} + \sqrt{۱۰} = \sqrt{y^۲ - ۲y + ۵}$$

با مجذور کردن دو طرف، به این معادله می‌رسیم:

$$۳y + ۵ = -\sqrt{۱۰y^۲ + ۴۰y + ۵۰}$$

دوباره، دو طرف را مجذور و، سپس، ساده می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$y^۲ + ۱۰y + ۲۵ = ۰ \Rightarrow (y + ۵)^۲ = ۰$$

یعنی $y = -۵$. عرض نقطهٔ M برابر -۵ است: $M(۰, -۵)$.

پاسخ. خط راست AB، محور $x'x$ را در نقطهٔ $N\left(\frac{۵}{۳}, ۰\right)$ و محور $y'y$ را در نقطهٔ $M(۰, -۵)$ قطع می‌کند.

۷۹. چهار ضلعی $OABC$، نه تنها متوازی‌الاضلاع، بلکه لوزی است، زیرا چهار ضلع آن، طول‌هایی برابر دارند.

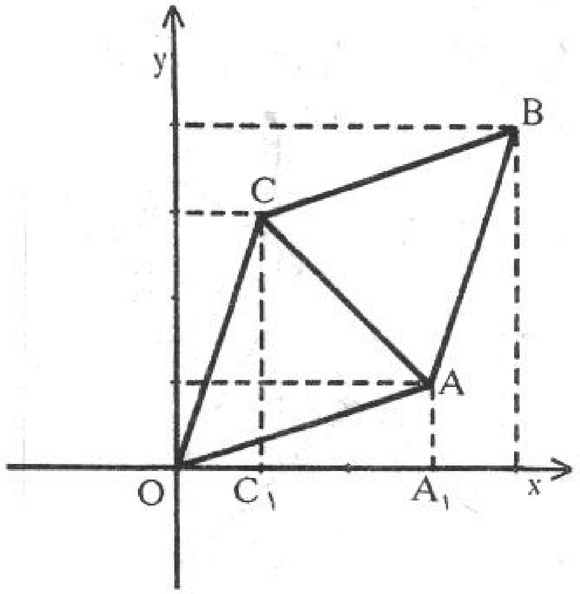
$$|OA| = |AB| = |BC| = |CO| = \sqrt{۱۰}$$

مساحت لوزی $OABC$، دو برابر مساحت مثلث OAC است. در ضمن، اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه $OCC_۱$ (شکل ۷۹) را $S_۱$، مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $OCAA_۱$ را $S_۲$، مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ $OAA_۱$ را $S_۳$ و مساحت مثلث OAC را S بنامیم، داریم:

$$S = S_۱ + S_۲ - S_۳$$

ولی به سادگی معلوم می‌شود که

$$S_۱ = \frac{۳}{۲}, S_۲ = ۴, S_۳ = \frac{۳}{۲}$$



شکل ۷۹

بنابراین ۴ $= S$ و مساحت لوزی $OABC$، برابر ۸ واحد مربع است. چون $|OA| = \sqrt{10}$، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع OA در لوزی، برابر $\frac{8}{\sqrt{10}}$ یا $\frac{4}{5}\sqrt{10}$ واحد می‌شود.

۸۰. A_1، B_1 و C_1 را، به ترتیب، پای ارتفاع‌های وارد از راس‌های A، B و C بر ضلع‌های روبه‌رو، و H را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها می‌گیریم (شکل ۸۰).

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC_1 و BHC_1، می‌توان نوشت:

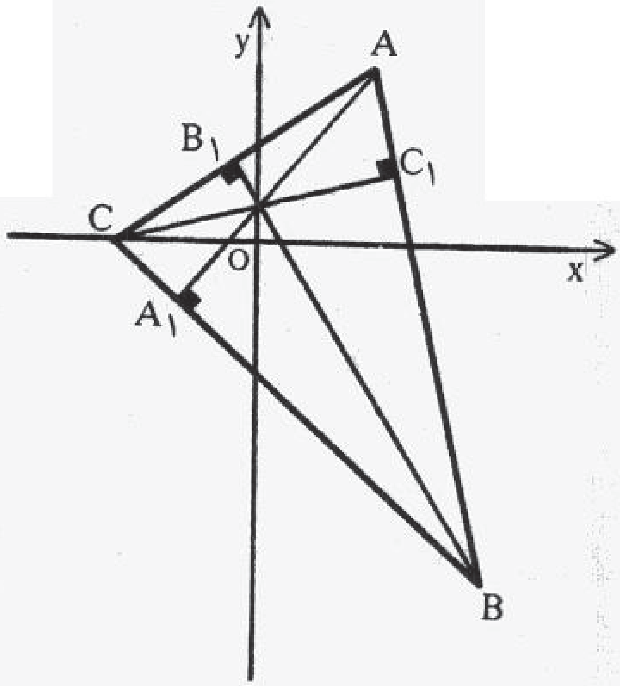
$$|HC_1|^2 = |AH|^2 - |AC_1|^2 = |BH|^2 - |BC_1|^2$$

که با جابه‌جایی جمله‌ها و کنار گذاشتن $|HC_1|^2$، به دست می‌آید.

$$|AH|^2 - |BH|^2 = |AC_1|^2 - |BC_1|^2 \qquad (1)$$

به همین ترتیب، از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACC_1 و BCC_1، به دست می‌آید:

$$|AC|^2 - |AC_1|^2 = |BC|^2 - |BC_1|^2$$



شکل ۸۰:

که با جابه‌جایی جمله‌ها، به این برابری می‌رسیم:

$$|AC_۱|^۲ - |BC_۱|^۲ = |AC|^۲ - |BC|^۲ \qquad (۲)$$

مقایسهٔ دو برابری (۱) و (۲)، به ما می‌دهد:

$$|HA|^۲ - |HB|^۲ = |AC|^۲ - |BC|^۲ \qquad (۳)$$

با همین روش، می‌توان به دست آورد:

$$|HA|^۲ - |HC|^۲ = |AB|^۲ - |BC|^۲ \qquad (۴)$$

اکنون، اگر مختصات H را (x, y) بگیریم، با توجه به مختصات نقطه‌های A و B و C (که در صورت مساله داده شده است)، برابری‌های

(۳) و (۴)، به این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases} (x-۱)^۲+(y-۱)^۲-(x-۲)^۲-(y+۳)^۲=-۱۳ \\ (x-۱)^۲+(y-۱)^۲-(x+۱)^۲-y^۲=-۱ \end{cases}$$

که پس از ساده کردن، به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x-۴y=-۱ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$$

اگر دو طرف معادلهٔ دوم را در ۴ ضرب و، سپس، نتیجه را با معادلهٔ اول جمع کنیم، به معادله $۹x=۳$ یا $x=\frac{۱}{۳}$ می‌رسیم. اگر این مقدار x را در یکی از معادله‌های دستگاه قرار دهیم، به دست می‌آید: $y=\frac{۱}{۳}$.

پاسخ. $H\left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$ (نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها).

یادداشت. مساله‌های ۷۸ و ۸۰ را، تنها با استفاده از «طول پاره‌خط‌های راست» حل کردیم. اندکی جلوتر (در فصل ۳) راه حل‌های بسیار ساده‌تری، برای این دو مساله، پیدا خواهیم کرد.

۸۱. *پاسخ‌ها.* الف) نقطه‌های واقع بر محورهای مختصات (هر نقطهٔ واقع بر محور $x'x$ دارای عرضِ برابر صفر و هر نقطهٔ واقع بر محور $y'y$ دارای طولِ برابر صفر است).

ب) همهٔ نقطه‌های واقع در دو ربع اول و سوم دستگاه مختصات (به‌جز نقطه‌های واقع بر محورها).

ج) همهٔ نقطه‌های واقع بر دو نیمساز: نیمساز ربع‌های اول و سوم و نیمساز ربع‌های دوم و چهارم.

د) همهٔ نقطه‌های واقع بر نیم‌صفحهٔ بالای محور $x'x$، به اضافهٔ همهٔ نقطه‌های واقع بر خود محور $x'x$.

ه) همهٔ نقطه‌های واقع بر خط راستی که، به فاصله ۲ و در سمت راست محور $y'y$ موازی با این محور رسم شده باشد.

و) همهٔ نقطه‌های واقع بر خط راست موازی محور $x'x$ که به فاصله ۳ واحد و پایین این محور رسم شده است.

ز) اگر عدد ۲ را به سمت چپ برابری ببریم و عبارت سمت چپ برابری را تجزیه کنیم، به دست می‌آید:

$$(x-۱)(y+۲)=۰$$

از آن‌جا یا $x=۱$ و یا $y=-۲$. بنابراین، پاسخ مساله عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع بر دو خط راست که یکی به فاصلهٔ واحد در سمت راست محور $y'y$ موازی آن رسم شده است و دیگری به‌فاصلهٔ دو واحد و در پایین محور $x'x$، موازی با آن است.

ح) دو خط راست موازی با محور $y'y$ و به فاصلهٔ ۲ از آن (یکی در سمت راست محور و دیگری در سمت چپ آن) رسم کنید. همهٔ نقطه‌های صفحه، که بین این دو خط راست موازی واقع‌اند، به اضافهٔ نقطه‌های واقع بر خود این دو خط راست، پاسخ مساله است.

مثلثات

۸۲. هر ۱۸۰ درجه برابر π رادیان است (یعنی به تقریب، برابر ۳/۱۴ رادیان)؛ بنابراین با تشکیل یک تناسب می‌توان درجه را به رادیان یا برعکس تبدیل کرد. در این‌جا، برای درجه، نشانهٔ $^\circ$ و برای رادیان نشانهٔ γ به کار برده‌ایم (گرچه، برای رادیان می‌توان نشانه‌ای در نظر نگرفت: هر کمان یا زاویه‌ای که، بدون نشانهٔ واحد، نوشته یا بیان شود، به معنای آن است که، با واحد رادیان سروکار دارد). مثلاً

$$\begin{matrix} ۱۸۰^\circ & \pi^\gamma \\ ۱۵ & ?^\gamma \end{matrix} \qquad ? = \frac{۱۵\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۲}$$

کمان ۱۵ درجه، همان کمان $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان است. برای بقیهٔ کمان‌ها، پاسخ را داده‌ایم:

$$۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}; ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}; ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}; ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳};$$

$$۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}; ۱۵۰^\circ = \frac{۵\pi}{۶}; ۱۹۵^\circ = \frac{۱۳}{۱۲}\pi;$$

$$۲۲۵^\circ = \frac{۵\pi}{۴}; ۲۴۰^\circ = \frac{۴\pi}{۳}; ۲۵۵^\circ = \frac{۱۷\pi}{۱۲};$$

$$۲۸۵^\circ = \frac{۱۹}{۱۲}\pi; ۳۰۰^\circ = \frac{۵}{۳}\pi; ۳۱۵^\circ = \frac{۷}{۴}\pi;$$

$$۳۳۰^\circ = \frac{۱۱\pi}{۶}; ۳۴۵^\circ = \frac{۲۳\pi}{۱۲}; ۳۷۵^\circ = \frac{۲۵\pi}{۱۲};$$

$$۴۱۴^\circ = \frac{۲۳\pi}{۱۰}; ۵۴۰^\circ = ۳\pi; ۶۱۲^\circ = \frac{۱۷\pi}{۵}$$

۸۳. *پاسخ‌ها:*

$$\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۸۰^\circ = ۱۵^\circ; \frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{۸} \times ۱۸۰^\circ = ۲۲^\circ ۳۰';$$

$$\frac{۵\pi}{۱۲} = ۷۵^\circ; \frac{۷\pi}{۴} = ۳۱۵^\circ; \frac{۵\pi}{۹} = ۱۰۰^\circ;$$

$$\frac{۱۷\pi}{۲۴} = ۱۲۷^\circ ۳۰'; ۲ = \left(\frac{۳۶۰}{\pi}\right)^\circ; ۵ = \left(\frac{۹۰۰}{\pi}\right)^\circ$$

۸۴. الف) وقتی می‌گوییم کمان $\overset{\frown}{AM}$، منظور کمانی از دایره است که آغاز آن، نقطهٔ A و انتهای آن نقطهٔ M باشد. در ضمن، حرکتِ روی محیط دایره، می‌تواند در جهت مثبت یا منفی باشد.

اگر از نقطهٔ A، روی محیط دایره، آغاز کنیم و در جهت مثبت پیش برویم، نخستین باری که به M برسیم، به اندازهٔ α درجه پیموده‌ایم؛ بنابراین،

یکی از کمانهای AM برابر α درجه است. ولی در نخستین باری که به M می‌رسیم، در آنجا متوقف نشویم، حرکت خود را ادامه دهیم و بار دومی که به نقطهٔ M می‌رسیم، توقف کنیم، مسیری برابر $(\alpha + ۳۶۰)$ درجه پیموده‌ایم؛ یعنی، یکی دیگر از کمان‌های $\overset{\frown}{AM}$ برابر $(\alpha + ۳۶۰)$ درجه است. به همین ترتیب، اگر بار سومی که به M می‌رسیم، بایستیم، کمانی برابر $(\alpha + ۳۶۰ \times ۲)$ درجه به دست می‌آید و غیره.

اکنون، با آغاز از نقطهٔ A، در جهت منفی حرکت می‌کنیم. اگر نخستین باری که به M می‌رسیم، توقف کنیم، کمان $\overset{\frown}{AM}$ برابر $(\alpha + ۳۶۰-)$ درجه می‌شود؛ بار دومی که به M می‌رسیم، کمانی برابر $(\alpha + ۳۶۰ \times ۲-)$ درجه و غیره به دست می‌آوریم.

به این ترتیب، اگر n را عددی درست (مثبت، منفی یا صفر) فرض کنیم، می‌توان کمان $\overset{\frown}{AM}$ (یا دقیق‌تر: کمان‌های $\overset{\frown}{AM}$) را، این طور نشان داد:

$$\overset{\frown}{AM} = ۳۶۰n^\circ + \alpha^\circ, (n \in \mathbf{Z})$$

بنابراین، کمان‌های $\overset{\frown}{AN}$، که برابر $\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AM}$ هستند، به این صورت درمی‌آیند:

$$\overset{\frown}{AN} = ۱۸۰n^\circ + \frac{\alpha^\circ}{۲}, (n \in \mathbf{Z})$$

این کمان‌ها، چنین‌اند:

$$\ldots, \left(-۳۶۰ + \frac{\alpha}{۲}\right)^\circ, \left(-۱۸۰ + \frac{\alpha}{۲}\right)^\circ, \frac{\alpha}{۲}^\circ,$$
$$, \left(۱۸۰ + \frac{\alpha}{۲}\right)^\circ, \left(۳۶۰ + \frac{\alpha}{۲}\right)^\circ, \ldots$$

تفاوت هر دو کمان پشت سر هم، برابر ۱۸۰ درجه (یعنی نیمی از محیط دایره) است و، بنابراین، انتهای کمان‌های $\overset{\frown}{AN}$، در روی محیط دایره، معرف دو سر یک قطر از دایره‌اند.

می‌توانستیم (و بهتر بود)، کمان‌ها را بر حسب رادیان بنویسیم (تا از بیان و نوشتن واحد کمان آزاد باشیم). در این صورت، اگر کوچکترین کمان مثبت $\overset{\frown}{AM}$ را a بنامیم، کمان‌های $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{AN}$، در حالت کلی، به این صورت درمی‌آمدند:

$$\overset{\frown}{AM}= ۲k\pi + a, \overset{\frown}{AN}= k\pi + \frac{a}{۲}, (k \in \mathbf{Z})$$

ب) شبیه حالت قبل استدلال می‌کنیم. اگر

$$\overset{\frown}{AM}= ۲k\pi + a, (k \in \mathbf{Z})$$

آن وقت، برای کمان‌های $\overset{\frown}{AP}$ داریم:

$$\overset{\frown}{AP}= \frac{۲}{۳}k\pi + \frac{a}{۳}, (k \in \mathbf{Z})$$

اگر انتهای کمان‌های $\overset{\frown}{AP}$ را $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... بنامیم، به سادگی دیده می‌شود که، هر یک از کمان‌های $\overset{\frown}{P_۱P_۲}$، $\overset{\frown}{P_۲P_۳}$، $\overset{\frown}{P_۳P_۴}$، ...، برابر $\frac{۲\pi}{۳}$، یعنی ۱۲۰ درجه است، بنابراین، $P_۴$ بر $P_۱$ منطبق می‌شود و، برای انتهای کمان‌های AP، تنها سه نقطهٔ $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$، که محیط دایره را به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند، به دست می‌آید و $P_۱P_۲P_۳$، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ج) استدلال شبیه حالت‌های قبل است. خودتان آن را تنظیم کنید.

۸۵. هر سه زاویهٔ مثلث را، بر حسب درجه می‌نویسیم. هر ۱۰ گراد برابر با ۹ درجه است، بنابراین زاویهٔ $۲۷۰x$ گراد، برابر

$$(۲۷۰x)^g = \left(\frac{۹}{۱۰} \times ۲۷۰x\right)^\circ = (۲۴۳۰x)^\circ$$

هر π رادیان برابر ۱۸۰ درجه است، پس

$$\pi x = (۱۸۰x)^\circ$$

مجموع سه زاویهٔ هر مثلث، برابر ۱۸۰ درجه است، یعنی باید داشته باشیم:

$$۶۳۰x + ۲۴۳۰x + ۱۸۰x = ۱۸۰$$

از این معادلهٔ ساده، به دست می‌آید: $x = \frac{۱}{۱۸}$. بنابراین، زاویه‌های مثلث، چنین‌اند:

$$۶۳۰x = ۶۳۰ \times \frac{۱}{۱۸} = ۳۵^\circ;$$
$$۲۴۳۰x = ۲۴۳۰ \times \frac{۱}{۱۸} = ۱۳۵^\circ$$
$$۱۸۰x = ۱۸۰ \times \frac{۱}{۱۸} = ۱۰^\circ$$

۸۶. اگر این نابرابری‌های روشن را بنویسیم:

$$۵۷^\circ < ۱ < ۶۰^\circ$$
$$۱۱۴^\circ < ۲ < ۱۲۰^\circ$$
$$۱۷۱^\circ < ۳ < ۱۸۰^\circ$$

با توجه به‌این که سینوس کمان‌هایی که، انتهای آن‌ها، در ربع‌های اول و دوم دایرهٔ مثلثاتی باشند، مقداری مثبت است، با مراجعهٔ ذهنی به دایرهٔ مثلثاتی، به دست می‌آید:

$$\sin ۳ < \sin ۱ < \sin ۲$$

۸۷. شبیه مسالهٔ قبل عمل می‌کنیم، ولی برای این که نابرابری‌ها را با دقت بیشتری بنویسیم، ۱ رادیان را بین ۵۷ درجه و ۵۸ درجه می‌گیریم:

$$۵۷^\circ < ۱ < ۵۸^\circ; \quad ۱۱۴^\circ < ۲ < ۱۱۶^\circ$$
$$۱۷۱^\circ < ۳ < ۱۷۴^\circ; \quad ۲۲۸^\circ < ۴ < ۲۳۲^\circ;$$
$$۲۸۵^\circ < ۵ < ۲۹۰^\circ; \quad ۳۴۲^\circ < ۶ < ۳۴۸^\circ$$
$$۳۹۹^\circ < ۷ < ۴۰۶^\circ$$

به جای نابرابری آخر، می‌توان نابرابری

$$۳۹^\circ < \alpha < ۴۶^\circ$$

در نظر گرفت، زیرا $\sin \alpha = \sin ۷$ (از همهٔ کمان‌ها، یک دور دایره، یعنی ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان، کم کرده‌ایم).

اکنون، می‌توانیم سینوس‌ها را منظم کنیم. توجه کنید: $\sin ۱$، $\sin ۲$، $\sin ۳$، $\sin ۷$، مقدارهایی مثبت و $\sin ۴$، $\sin ۵$، $\sin ۶$ مقدارهایی منفی‌اند و $\sin ۷$ از $\sin ۳$ بزرگتر و از $\sin ۱$ کوچکتر است:

$$\sin ۵ < \sin ۴ < \sin ۶ < \sin ۳ < \sin ۷ < \sin ۱ < \sin ۲$$

۸۸. داریم:

$$\cos ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴} \approx \frac{۲/۴۴۹ - ۱/۴۱۴}{۴} =$$
$$= \frac{۱/۰۳۵}{۴} > ۰/۲۵۸ > ۰/۲۵$$

یعنی $\cos \alpha < \cos ۷۵^\circ$، پس $۷۵^\circ < \alpha$ و

$$۷۵^\circ < \alpha^\circ < ۹۰^\circ$$

از آن‌جا که

$$\cos ۷۵^\circ - \cos \alpha^\circ \approx ۰/۰۸,$$

$$\cos \alpha - \cos ۹۰^\circ \approx ۰/۲۵$$

روشن است که α به ۷۵ درجه، بسیار نزدیکتر است تا به ۹۰ درجه و می‌توان اطمینان داشت که

$$۷۵^\circ < \alpha^\circ < ۸۰^\circ$$

در واقع، زاویه α، اندکی بیشتر از ۷۵ درجه و ۳۰ دقیقه است.

۸۹. برای تانژانت زاویهٔ ۷۵ درجه داریم:

$$tg ۷۵^\circ = ۲ + \sqrt{۳} \approx ۲ + ۱/۷۳۲ = ۳/۷۳۲$$

از ۷۵ درجه به بالا، مقدار تانژانت، به سرعت زیاد می‌شود. بنابراین ۳/۷۵، تانژانت زاویه‌ای نزدیک به ۷۵ درجه و اندکی بزرگتر از آن است (در واقع، ۳/۷۵ تانژانت ۷۵ درجه و ۴ دقیقه است). ولی انتهای کمان α درجه در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است، بنابراین

$$\alpha \approx ۱۸۰^\circ + ۷۵^\circ = ۲۵۵^\circ$$

و دقیق‌تر $\alpha = ۲۵۵^\circ ۴'$.

۹۰. ۱) از برابری $\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = ۱$، مقدار $\cos \alpha$ به دست می‌آید:

$$\cos^۲ \alpha = ۱ - \sin^۲ \alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵}$$

و از آن‌جا $\cos \alpha = -\frac{۳}{۵}$ (انتهای کمان α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی و، بنابراین، کسینوس آن منفی است)، سپس

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{۴}{۳}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{۳}{۴}$$

۲) بلافاصله به دست می‌آید: $\cot\alpha = -\frac{12}{5}$. سپس

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{144}{25}} = \frac{25}{169}$$

در نتیجه $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ (انتهای کمان α، در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی و سینوس آن مثبت است). مقدار $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ هم به سادگی به دست می‌آید.

۳) *پاسخ*. $\sin\alpha = \frac{40}{41}$، $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{40}{9}$، $\cot\alpha = -\frac{9}{40}$.

۹۱. الف) $\cos\alpha$، در فاصلهٔ از $\cos 0°$ تا $\cos 180°$، مرتباً کاهش پیدا می‌کند و از ۱ به ۱− می‌رسد (می‌گویند: مقدار کسینوس، در ربع‌های اول و دوم دایرهٔ مثلثاتی، نزولی است). بنابراین، اگر $0 < \alpha° \leq 90°$، آن وقت $\cos 2\alpha < \cos\alpha$.

در واقع، اگر زاویهٔ حاده و مثبت α، از ۴۵ درجه کوچکتر باشد، 2α هم، در ربع اول قرار می‌گیرد و چون از α بزرگتر است، کسینوس آن از کسینوس α کمتر می‌شود. در حالت $\alpha = 45°$ هم، 2α برابر ۹۰ درجه و کسینوس آن برابر صفر می‌شود و، صفر، از هر عدد مثبت کوچکتر است. در حالتی که زاویهٔ حادهٔ α از ۴۵ درجه بیشتر باشد، انتهای کمان 2α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع می‌شود و کسینوسی منفی دارد و عدد منفی از عدد مثبت کوچکتر است. برای $\alpha = 90°$، داریم $\cos 90° = 0$ و $\cos 180° = -1$ و عدد منفی از صفر کوچکتر است.

ب) شبیه حالت کسینوس استدلال کنید. توجه داشته باشید: مقدارهای سینوس، در ربع اول، با بزرگ شدن کمان، رو به افزایش می‌گذارد (صعودی است) و در ربع دوم، با بزرگتر شدن کمان، رو به کاهش می‌رود (نزولی است). پاسخ تمرین:

در حالت $0 < \alpha < 60^\circ$: $\sin 2\alpha > \sin\alpha$؛

در حالت $\alpha = 60^\circ$: $\sin 2\alpha = \sin\alpha$؛

در حالت $60^\circ < \alpha < 90^\circ$: $\sin 2\alpha < \sin\alpha$.

۹۲. دو طرف رابطهٔ فرض را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (1/4)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25};$$

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

اکنون از تفاضل برابری‌های

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

خواهیم داشت:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \pm\frac{1}{5}$$

توجه کنید: برای ۴۵ درجه، مقدارهای سینوس و کسینوس یکی است؛

برای زاویه‌های حاده و مثبت کوچکتر از ۴۵ درجه، مقدار سینوس از مقدار کسینوس کوچکتر است (چرا؟) و داریم:

$$0 < \alpha < 45^\circ \Rightarrow \sin\alpha < \cos\alpha$$

برای زاویه‌های حادهٔ بزرگتر از ۴۵ درجه، مقدار سینوس از مقدار کسینوس بزرگتر است (چرا؟) و داریم:

$$45^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha$$

اکنون باید، برای پیدا کردن $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$، این دو دستگاه را حل کنیم:

$$1)\ \begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5} \\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5} \\ 45^\circ<\alpha<90^\circ \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5} \\ \sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{5} \\ 0^\circ<\alpha<45^\circ \end{cases}$$

از دستگاه اول به دست می‌آید:

$$\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

و از دستگاه دوم

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

مقدارهای تانژانت و کتانژانت، در هر حالت به سادگی به دست می‌آیند. مساله دو جواب دارد. اگر دو جواب زاویهٔ α را، α' و α'' فرض کنیم، α' و al'' متمم یکدیگر خواهند بود: $\alpha'+\alpha''=90^\circ$ (چرا؟).

۹۳. داریم:

$$\text{tg}\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{169}{60}$$

یادداشت. با در دست داشتن مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$، می‌توان هر یک از نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورد. اگر در دستگاه

$$\begin{cases} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{120}{169} \end{cases}$$

دو معادله را یک بار با هم جمع و بار دیگر از هم کم کنیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} (\sin\alpha + \cos\alpha)^۲ = \frac{۲۸۹}{۱۶۹} \\ (\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶۹} \end{cases}$$

و یا (توجه کنید: چون α زاویه‌ای حاده است، پس مجموع سینوس و کسینوس آن، همیشه مثبت است):

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{۱۷}{۱۳} \\ \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۷}{۱۳} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{۱۷}{۱۳} \\ \sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{۷}{۱۳} \end{cases}$$

بنابراین

$$\left| \begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ \cos\alpha = \frac{۵}{۱۳} \\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{۱۲}{۵} \\ \cot\alpha = \frac{۵}{۱۲} \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{۵}{۱۳} \\ \cos\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{۵}{۱۲} \\ \cot\alpha = \frac{۱۲}{۵} \end{array} \right.$$

۹۴. محاسبه‌ها را به طور جداگانه انجام می‌دهیم:

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۶} = \sin\left(۲\pi + \frac{۵\pi}{۶}\right) = \sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin ۱۵۰^\circ =$$
$$= \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲};$$

(سینوس ۱۵۰ درجه و سینوس ۳۰ درجه با هم برابرند، هر دو کمان یا هر دو زاویه‌ای که مجموعی برابر ۱۸۰ درجه داشته باشند، سینوس‌هایی برابر دارند؛

روی دایرهٔ مثلثاتی آزمایش کنید).

$$\cos\frac{۷\pi}{۳} = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = \cos\frac{\pi}{۳} = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲};$$

$$\mathrm{tg}\frac{۱۷\pi}{۴} = \mathrm{tg}\left(۴\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{۴} = \mathrm{tg}۴۵^\circ = ۱;$$

$$\cot\frac{۱۳\pi}{۴} = \cot\left(۲\pi + \frac{۵\pi}{۴}\right) = \cot\frac{۵\pi}{۴} = \cot ۲۲۵^\circ =$$
$$= \cot ۴۵^\circ = ۱$$

(هر دو زاویه یا دو کمانی که اختلافی برابر ۱۸۰ درجه داشته باشند، تانژانت‌های برابر و، همچنین کتانژانت‌های برابر دارند؛ روی دایرهٔ مثلثاتی آزمایش کنید).

اکنون، محاسبهٔ A، دشوار نیست:

$$A = ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۵ \times ۱ - ۱ =$$
$$= ۲ + ۱ - ۵ - ۱ = -۳$$

۹۵. در ساعت ۱۲، دو عقربه، بر هم منطبق‌اند. عقربهٔ دقیقه شمار، در هر ساعت، تمام محیط دایره، یعنی ۳۶۰ درجه را می‌پیماید، پس در یک ربع ساعت، ۹۰ درجه را پیموده است. عقربهٔ ساعت شمار، در هر ساعت، به اندازهٔ $\frac{۳۶۰}{۱۲}$، یعنی ۳۰ درجه و در یک ربع ساعت $\frac{۳۰}{۴}$، یعنی ۷ درجه و ۳۰ دقیقه جلو می‌رود. بنابراین، زاویهٔ بین دو عقربه، برابر است با

$$۹۰^\circ - (۷^\circ ۳۰') = ۸۲^\circ ۳۰'$$

این زاویه، بر حسب رادیان برابر $\frac{۱۱\pi}{۲۴}$ می‌شود (محاسبه کنید!).

۹۶. اگر در تقسیم عدد درست k بر ۱۴، خارج‌قسمت تقسیم را، عدد m (مثبت، منفی یا صفر) و باقی ماندهٔ تقسیم را، عدد غیر منفی n (مثبت یا صفر) فرض کنیم:

$$k = ۱۴m + n, (۰ \leq n < ۱۴)$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\sin\frac{k\pi}{۷} = \sin\left(\frac{۱۴m\pi + n\pi}{۷}\right) = \sin\left(۲m\pi + \frac{n\pi}{۱۴}\right) =$$
$$= \sin\frac{n\pi}{۱۴}$$

n می‌تواند تنها یکی از عددهای درست از ۰ تا ۱۳ باشد. این عددها را به جای n می‌گذاریم. ۱۴ مقدار به دست می‌آید:

$$\sin ۰, \sin\frac{\pi}{۷}, \sin\frac{۲\pi}{۷}, \sin\frac{۳\pi}{۷}, \sin\frac{۴\pi}{۷},$$
$$\sin\frac{۵n}{۷}, \sin\frac{۶\pi}{۷}, \sin\pi, \sin\frac{۸\pi}{۷}, \sin\frac{۹\pi}{۷},$$
$$\sin\frac{۱۰\pi}{۷}, \sin\frac{۱۱\pi}{۷}, \sin\frac{۱۲\pi}{۷}, \sin\frac{۱۳\pi}{۷}$$

ولی، این ۱۴ مقدار، دو به دو، با هم برابرند:

$$\sin ۰ = \sin\pi, \sin\frac{\pi}{۷} = \sin\frac{۶\pi}{۷}, \sin\frac{۲\pi}{۷} = \sin\frac{۵\pi}{۷},$$
$$\sin\frac{۳\pi}{۷} = \sin\frac{۴\pi}{۷},$$ (زاویه‌های مکمل یکدیگر)
$$\sin\frac{۸\pi}{۷} = -\sin\frac{\pi}{۷}$$ و $$\sin\frac{۱۳\pi}{۷} = -\sin\frac{\pi}{۷}$$

پس $\sin\frac{۱۳\pi}{۷} = \sin\frac{۸\pi}{۷}$ و به همین ترتیب:

$$\sin\frac{۹\pi}{۷} = \sin\frac{۱۲\pi}{۷}, \sin\frac{۱۰\pi}{۷} = \sin\frac{۱۱\pi}{۷}$$

بنابراین، برای $\sin\frac{k\pi}{۷}$، ۷ مقدار مختلف به دست می‌آید.

برای $\cos\frac{۲k\pi}{۵}$، سه مقدار مختلف به دست می‌آید:

$$\cos ۰ = ۱, \cos ۷۲^\circ; -\cos ۳۶^\circ$$

(خودتان آزمایش کنید)

۹۷. از نابرابری روشن $(m-n)^۲ \geq ۰$ نتیجه می‌شود:

$$m^۲ - ۲mn + n^۲ \geq ۰ \Rightarrow m^۲ + n^۲ \geq ۲mn$$

تنها در حالت $m = n$، مقدار $m^۲ + n^۲$ با مقدار $۲mn$ برابر است. بنابراین، کسر $\frac{m^۲+n^۲}{۲mn}$، با توجه به مثبت بودن m و n، نمی‌تواند از ۱ کوچکتر باشد، در حالی که $\cos\alpha$، کوچکتر یا برابر ۱ است. به این ترتیب: اگر m و n برابر باشند، $\cos\alpha$ می‌تواند با $\frac{m^۲+n^۲}{۲mn}$ برابر باشد که، در این صورت، مقدار α برابر با $۲k\pi(k \in \mathbf{Z})$ می‌شود و برای بقیهٔ مقدارهای m و n، مقدار $\cos\alpha$ از این کسر کوچکتر است.

۹۸. $(a+b)^۲$ نمی‌تواند از $۴ab$ کوچکتر باشد، زیرا

$$(a+b)^۲ - ۴ab = (a-b)^۲ \geq ۰$$

بنابراین، تنها وقتی برابری صورت مساله برقرار است که داشته باشیم: $a = b$؛ و در این صورت، به دست می‌آید:

$$\sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۹۰^\circ, ۲۷۰^\circ$$

۹۹. هر دو برابری فرض را مجذور و، سپس، برابری‌های حاصل را با هم جمع کنید و از آن‌جا، مقدار لازم را به دست آورید.

پاسخ. $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{a^۲ + b^۲ - ۲}{۲}$.

۱۰۰. فرض می‌کنیم $x > y$ (در حالت $x < y$، نقش x و y با هم عوض می‌شود) و $\mathrm{tg}y$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\cos^۲ y = \frac{۱}{۱ + \mathrm{tg}^۲ y} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow$$

$$۱ + \mathrm{tg}^۲ y = \frac{a+b}{a} = ۱ + \frac{b}{a} \Rightarrow \mathrm{tg}^۲ y = \frac{b}{a}$$

پس $\mathrm{tg}y = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ ($\cos y$ مثبت بود، پس انتهای کمان y در دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند در ربع اول باشد یا در ربع چهارم؛ در حالت اول $\mathrm{tg}y$ مثبت و در حالت دوم $\mathrm{tg}y$ منفی می‌شود).

چون $\mathrm{tg}x = \sqrt{\frac{b}{a}}$، دو حالت پیش می‌آید:

۱) $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y$، وقتی دو کمان، تانژانت برابر داشته باشند، یا انتهای آن‌ها، در دایرهٔ مثلثاتی بر هم منطبق است و یا در دو سر یک قطر قرار دارند. این دو وضع ممکن را می‌توان، به این صورت نشان داد:

$$x - y = k\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

وقتی k عددی زوج باشد (۰، ۲، ۴، ...)، انتهای دو کمان x و y بر هم منطبق‌اند و اگر n عددی فرد باشد (۱، ۳، ۵، ...)، دو انتهای کمان‌ها در دو سر یک قطر از دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرند.

۲) $\mathrm{tg}x = -\mathrm{tg}y$. روشن است که $\mathrm{tg}y$ و $\mathrm{tg}(-y)$، قرینهٔ یکدیگرند. پس می‌توان نوشت: $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(-y)$ و شبیه حالت قبل استدلال کرد:

$$x - (-y) = k\pi \Rightarrow x + y = k\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

پاسخ. $x \pm y = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

۱۰۱. هر کسر را، به طور جداگانه، محاسبه می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{a^۲}{\cos^۲ x} = a^۲(۱ + \mathrm{tg}^۲ x) = a^۲\left(۱ + \sqrt[۳]{\frac{b^۲}{a^۲}}\right) =$$

$$= a^۲ \cdot \frac{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}} = \sqrt[۳]{a^۴}(\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲})$$

($a^۲$ که در جلو کسر بود، به صورت $\sqrt[۳]{a^۶}$ نوشتیم و، سپس، با $\sqrt[۳]{a^۲}$ در مخرج کسر، ساده کردیم). پس

$$\frac{a}{\cos x} = \sqrt[۳]{a^۲} \cdot \sqrt{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}}$$

به این دلیل، موقع جذر گرفتن، تنها جواب مثبت را در نظر گرفتیم که، بنا بر فرض، a و $\cos x$، مقدارهایی مثبت‌اند. بعد:

$$\frac{b^۲}{\sin^۲ x} = b^۲(۱ + \cot^۲ x) = b^۲\left(۱ + \sqrt[۳]{\frac{a^۲}{b^۲}}\right) =$$

$$= b^۲ \cdot \frac{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۳]{b^۲}} = \sqrt[۳]{b^۴}(\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲});$$

در نتیجه

$$\frac{b}{\sin x} = \sqrt[۳]{b^۲} \cdot \sqrt{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}}$$

اکنون دیگر نتیجهٔ کامل به دست می‌آید:

$$\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} = \sqrt{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}}(\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲}) =$$

$$= \sqrt{(\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲})^۳}$$

۱۰۲. $X = \sin x$ و $Y = \cos x$ فرض کنید و دستگاه شامل دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید و X و Y (یعنی $\sin x$ و $\cos x$) را به دست آورید:

$$\sin x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \cos x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

و در رابطه $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ قرار دهید.

پاسخ. $(cb' - bc')^۲ + (ac' - ca')^۲ = (ab' - ba')^۲$.

۱۰۳. سمت چپ برابری را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{۱}{۱ - \sin^۲ x} - ۱} = \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x} - ۱} = \sqrt{\frac{۱ - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}} = \sqrt{\mathrm{tg}^۲ x} = |\mathrm{tg} x|$$

مقدار رادیکال (ریشه دوم) همیشه مثبت است. به همین دلیل، $\mathrm{tg}x$ را با علامت قدر مطلق نوشته‌ایم.

بنابراین، مساله به این‌جا می‌رسد که ببینیم $\mathrm{tg}x$ و $|\mathrm{tg}x|$ با چه شرطی برابرند. برای این برابری، باید $\mathrm{tg}x$ منفی نباشد، یعنی اگر x بین ۰ درجه و ۳۶۰ درجه باشد، داشته باشیم:

$$۰ \leq x < ۹۰^\circ \text{ یا } ۱۸۰^\circ \leq x < ۲۷۰^\circ$$

(برای $x = ۹۰^\circ$ و $x = ۲۷۰^\circ$، مقدار $\cos x$، یعنی مخرج کسر زیر رادیکال، صفر می‌شود).

به این ترتیب، برابری مساله، وقتی اتحاد است که، انتهای کمان x در روی دایره مثلثاتی، در ربع اول یا در ربع سوم باشد (با در نظر گرفتن آغاز ربع اول و سوم و حذف انتهای این دو ربع).

۱۰۴. ضمن محاسبه، به این نکته توجه داشته باشیم که، برای هر مقدار دلخواه کمان x، مقدارهای $۱ - \sin x$ و $۱ - \cos x$ و، همچنین $۱ + \sin x$, $۱ + \cos x$ هرگز منفی نمی‌شوند، زیرا مقدارهای سینوس و کسینوس یک کمان نمی‌توانند از ۱ بزرگتر یا از ۱− کوچکتر باشند.

هر پرانتز را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم. هر رادیکال شامل یک کسر است. صورت و مخرج هر کسر، مقداری غیر منفی‌اند، بنابراین، می‌توان رادیکال را روی صورت و روی مخرج، به طور جداگانه قرار دارد:

$$\sqrt{\frac{۱ - \sin\alpha}{۱ + \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{۱ + \sin\alpha}{۱ - \sin\alpha}} = \frac{\sqrt{۱ - \sin\alpha}}{\sqrt{۱ + \sin\alpha}} - \frac{\sqrt{۱ + \sin\alpha}}{\sqrt{۱ - \sin\alpha}} =$$

$$= \frac{(۱ - \sin\alpha) - (۱ + \sin\alpha)}{\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha}} = \frac{-۲\sin\alpha}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} = \frac{-۲\sin\alpha}{|\cos\alpha|};$$

و به همین ترتیب:

$$\sqrt{\frac{۱ - \cos\alpha}{۱ + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{۱ + \cos\alpha}{۱ - \cos\alpha}} = \frac{-۲\cos\alpha}{|\sin\alpha|};$$

بنابراین

$$A = \frac{-۲\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \cdot \frac{-۲\cos\alpha}{|\sin\alpha|} = \frac{۴\sin\alpha\cos\alpha}{|\sin\alpha \cdot \cos\alpha|}$$

(می‌دانید که $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$)، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$. برای این منظور، باید انتهای کمان α، در ربع اول یا ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، یعنی

$$۰° < \alpha < ۹۰° \text{ یا } ۱۸۰° < \alpha < ۲۷۰°$$

علامت برابری را به این دلیل نگذاشتیم که، برای $\alpha = ۰°$، $۱ - \cos\alpha$؛ به ازای $\alpha = ۱۸۰°$، $۱ + \cos\alpha$؛ به ازای $\alpha = ۹۰°$، $۱ - \sin\alpha$ و به

ازای $\alpha = ۲۷۰^\circ$، $\sin \alpha + ۱$ برابر صفر می‌شود، در حالی که مخرج کسر نمی‌تواند برابر صفر باشد (مخرج‌ها را، در عبارت A ببینید). در این حالت داریم:

$$|\sin \alpha \cdot \cos \alpha| = \sin \alpha \cos \alpha$$

و به دست می‌آید: $A = ۴$.

۲) انتهای کمان α، در ربع دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد:

$$۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ, ۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$$

در این حالت، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$، منفی است و

$$|\sin \alpha \cdot \cos \alpha| = -\sin \alpha \cos \alpha$$

و در نتیجه: $A = -۴$.

۱۰۵. در شکل ۸۱ کوچکترین کمان مثبت AM را برابر α می‌گیریم؛ بنابراین $\widehat{AOM} = \alpha$ و $\widehat{AA'M} = \frac{\alpha}{۲}$. در این شکل داریم:

$$|PM| = \sin \alpha, |OP| = \cos \alpha$$

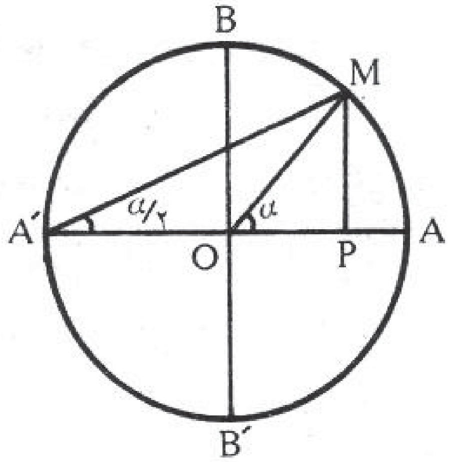
از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $PA'M$ به دست می‌آید:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{۲} = \frac{|PM|}{|A'P|} = \frac{|PM|}{|A'O| + |OP|}$$

$A'O$ شعاع دایرهٔ مثلثاتی است، یعنی: $|A'O| = ۱$. بنابراین

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{۲} = \frac{\sin \alpha}{۱ + \cos \alpha}$$

۱۰۶. یادآوری می‌کنیم، اگر مجموع دو کمان برابر π (۱۸۰ درجه) باشد، یعنی دو کمان (یا دو زاویه) مکمل یکدیگر باشند، مجموع کسینوس‌های



شکل ۸۱

آن‌ها، برابر صفر می‌شود. در واقع، اگر α را زاویه‌ای حاده و مثبت بگیریم، $\alpha - {}^\circ۱۸۰$، زاویه‌ای منفرجه می‌شود، یعنی انتهای کمان $(\alpha - {}^\circ۱۸۰)$ در ربع دوم قرار می‌گیرد. کسینوس‌های دو زاویهٔ α و $(\alpha - {}^\circ۱۸۰)$ قرینهٔ یکدیگر درمی‌آیند و مجموعی برابر صفر پیدا می‌کنند.

برای حل مساله، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) n عددی فرد است. در این صورت، تعداد جمله‌ها (که برابر $n - ۱$ است)، عددی زوج می‌شود و، اگر دو به دوی آن‌ها را با هم در نظر بگیریم، جمله‌ای اضافی باقی نمی‌ماند. جمله‌ها را دو به دو، از دو طرف، با هم در نظر می‌گیریم: جملهٔ اول را با جملهٔ آخر، جملهٔ دوم را با جملهٔ یکی مانده به آخر و غیره. عبارت سمت چپ برابری فرض، به این صورت در می‌آید:

$$\left[\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{(n-۱)\pi}{n}\right] + \left[\cos\frac{۲\pi}{n} + \cos\frac{(n-۲)\pi}{n}\right] + \dots$$

در هر کروشه، مجموع کمان‌ها، برابر است با π (۱۸۰ درجه):

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi}{n} - \frac{\pi}{n} = \pi,$$

$$\frac{۲\pi}{n} + \frac{(n-۲)\pi}{n} = \frac{۲\pi}{n} + \frac{n\pi}{n} - \frac{۲\pi}{n} = \pi, \dots$$

بنابراین، مجموع کسینوس‌های آن‌ها، برابر صفر و، در نتیجه، مجموع همهٔ جمله‌ها، برابر صفر می‌شود.

۲) n عددی زوج است. در این حالت اگر، مثل حالت قبل، جمله‌ها را، یکی از اول و دیگری از آخر، در نظر بگیریم، باز هم مجموع آن‌ها برابر صفر است. ولی در این حالت، یک جملهٔ اضافی، که در وسط عبارت است باقی می‌ماند. این جمله کدام است؟ کمان این جمله، برابر است با نصف مجموع کمان‌های دو جملهٔ اول و آخر (چرا؟):

$$\frac{۱}{۲}\left[\frac{\pi}{n}+\frac{(n-۱)\pi}{n}\right]=\frac{\pi}{۲}$$

و $\cos\frac{\pi}{۲}$، یعنی $\cos ۹۰^\circ$، برابر صفر است. بنابراین، در این حالت هم، عبارت مفروض، برابر صفر می‌شود.

۱۰۷. داریم:

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\mathrm{tg}\widehat{C}\Rightarrow\frac{|AB|}{۲}=\mathrm{tg}۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

از آن‌جا

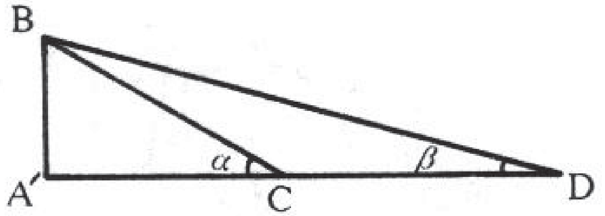
$$|AB|=۲\sqrt{۳}\approx ۲\times ۱/۷۳۲=۳/۴۶۴$$

ارتفاع درخت، اندکی کمتر از سه متر و نیم است.

۱۰۸. داریم (شکل ۸۲):

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{|A'B|}{|A'C|}$$

پس $|A'C|=\frac{|A'B|}{\mathrm{tg}\alpha}=|A'B|\cot\alpha$. سپس



شکل ۸۲

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{|A'B|}{|A'D|} = \frac{|A'B|}{|A'C| + |CD|} = \frac{|A'B|}{|A'B| \cot\alpha + a}$$

از آن‌جا

$$|A'B| \cot\alpha \mathrm{tg}\beta + a\mathrm{tg}\beta = |A'B|;$$

$$|A'B|(\cot\alpha \mathrm{tg}\beta - ۱) = -a\mathrm{tg}\beta;$$

$$|A'B| = \frac{a\mathrm{tg}\beta}{۱ - \cot\alpha \mathrm{tg}\beta} = \frac{a\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}$$

به این مقدار، باید، طول ارتفاع سه پایه را اضافه کرد تا ارتفاع بلندی به دست آید:

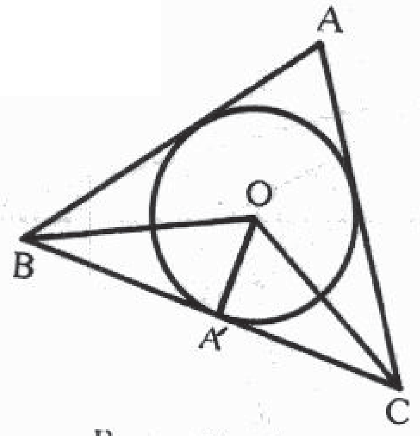
$$|AB| = \frac{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta} + ۱$$

۱۰۹. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث است. در شکل ۸۳، $|OA'| = r$، $\widehat{OBA'} = \frac{\beta}{۲}$و $\widehat{OCA'} = \frac{\gamma}{۲}$ و OA'، شعاع دایره محاطی مثلث (به طول r) است. در دو مثلث OBA' و $OA'C$ (که قائم‌الزاویه‌اند)، داریم:

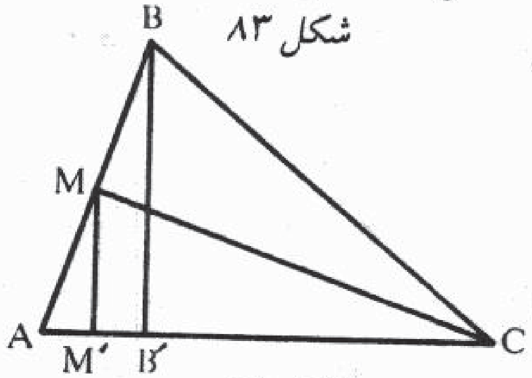
$$\cot\frac{\beta}{۲} = \frac{|BA'|}{r}, \cot\frac{\gamma}{۲} = \frac{|A'C|}{r}$$

از مجموع این دو برابری به دست می‌آید:

$$\cot\frac{\beta}{۲} + \cot\frac{\gamma}{۲} = \frac{|BA'| + |A'C|}{r} = \frac{a}{r}$$



شکل ۸۳

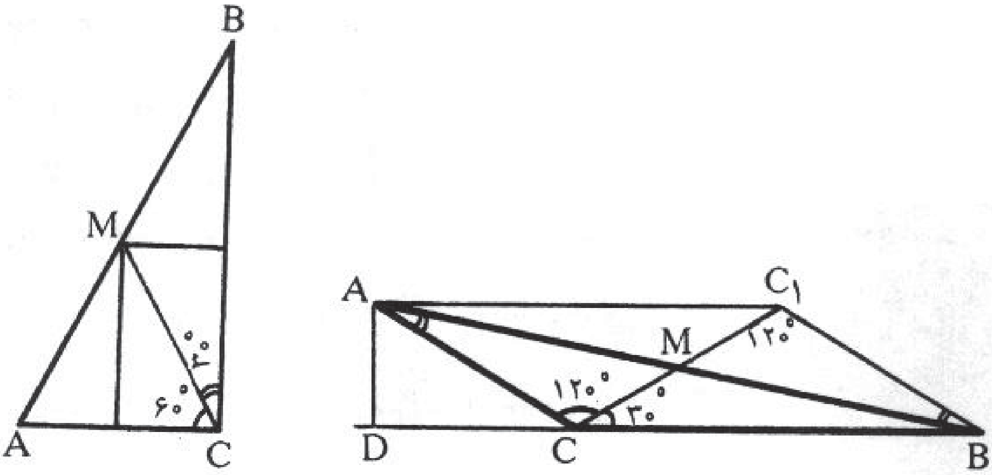


شکل ۸۴

از آن‌جا $r = \dfrac{a}{\cot \frac{\beta}{۲} + \cot \frac{\gamma}{۲}}$. دو برابری دیگر هم، به همین ترتیب به دست می‌آیند.

۱۱۰. در مثلث ABC (شکل ۸۴)، CM را میانه و BB' را ارتفاع آن فرض کنید. M وسط ضلع AB است، پس دو مثلث AMC و BMC، مساحت‌هایی برابر دارند (چرا؟)؛ یعنی مساحت مثلث AMC، برابر است با نصف مساحت مثلث ABC. اگر قاعدهٔ مشترک این دو مثلث را، AC بگیریم، روشن است که باید طول ارتفاع MM' (از مثلث AMC)، نصف طول ارتفاع BB' (از مثلث ABC) باشد.

به این ترتیب، در مثلث مورد نظر مساله، فاصلهٔ نقطهٔ M (پای میانهٔ CM) از دو ضلع BC و AC، به ترتیب، برابر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌شود. از



شکل ۸۵:

طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه $MM'C$ داریم:

$$\sin \widehat{MC}A = \frac{|MM'|}{|MC|} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

به همین ترتیب: $\sin \widehat{MC}B = \frac{۱}{۲}$. بنابراین، زاویهٔ MCA می‌تواند برابر ۶۰ درجه یا ۱۲۰ درجه، و زاویهٔ MCB برابر ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه باشد. چون مجموع این دو زاویه باید از ۱۸۰ درجه کمتر باشد، دو حالت ممکن است:

۱) $\widehat{MC}B = ۳۰^\circ$ و $\widehat{MC}A = ۶۰^\circ$ (شکل ۸۵_a)؛

۲) $\widehat{MC}B = ۳۰^\circ$ و $\widehat{MC}A = ۱۲۰^\circ$ (شکل ۸۵_b).

در حالت اول، با مثلث قائم‌الزاویه‌ای سروکار داریم که، دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن طول‌هایی برابر ۱ و $\sqrt{۳}$ و، بنابراین مساحتی برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دارد.

در حالت دوم، میانهٔ CM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ $C_۱$ ادامه می‌دهیم، متوازی‌الاضلاع $ACBC_۱$ به دست می‌آید. دو مثلث $CC_۱B$ و ABC،

مساحت‌هایی برابر دارند (قاعدهٔ CB در آن‌ها مشترک است و ارتفاع‌های وارد از A و $C_۱$ بر این قاعده، با هم برابرند و هر کدام، طولی برابر ۱ دارد). ولی مثلث $CC_۱B$ متساوی‌الساقین است (زیرا زاویهٔ $C_۱CB$ برابر ۳۰ درجه و زاویهٔ $CC_۱B$ – که با زاویه $C_۱CA$ برابر است ـ برابر ۱۲۰ درجه است، بنابراین، $C_۱BC$ هم برابر ۳۰ درجه می‌شود) و داریم:

$$|CC_۱| = |C_۱B| = ۲$$

(طول $CC_۱$، دو برابر طول میانهٔ CM است): بنابراین (حل مسالهٔ ۱۱۹ را ببینید):

$$S_{ABC} = S_{CC_۱B} = \frac{۱}{۲}|CC_۱| \cdot |C_۱B| \cdot \sin ۱۲۰^\circ =$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

پاسخ. مساحت مثلث ABC، برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $\sqrt{۳}$.

۱۱۱. داریم:

$$\text{tg}^۲ x = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۱ - \cos^۲ x}{۱ - \sin^۲ x} = \frac{(۱ - \cos x)(۱ + \cos x)}{(۱ - \sin x)(۱ + \sin x)}$$

بنابراین، با توجه به شرط مساله $\left(۰ < x < \frac{\pi}{۲}\right)$ که بنابر آن

$$۱ - \cos x \neq ۰, ۱ - \sin x \neq ۰$$

برابری مساله، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱ + \cos x}{۱ + \sin x} = ۱ \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

۱۱۲. با مجذور کردن دو طرف برابری اول، به دست می‌آید:

$$۱ + ۲\sin x \cos x = m^۲ \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۲}(m^۲ - ۱)$$

مقدار سمت چپ برابری دوم را بر حسب m محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^۳ x + \cos^۳ x = (\sin x + \cos x)^۳ - ۳\sin x \cos x(\sin x + \cos x) =$$
$$= m^۳ - \frac{۳}{۲}(m^۲ - ۱) \cdot m = m^۳ - \frac{۳}{۲}m^۳ + \frac{۳}{۲}m =$$
$$= \frac{۱}{۲}(۳m - m^۳)$$

و این عبارت، باید برابر n باشد:

$$\frac{۱}{۲}(۳m - m^۳) = n \Rightarrow ۲n = ۳m - m^۳$$

۱۱۳. داریم:

$$a^۳ + b^۳ = (a + b)^۳ - ۳ab(a + b) =$$
$$= (۲ + \sin^۲ x + \cos^۲ x)^۳ - ۳(۱ + \sin^۲ x)\times$$
$$\times(۱ + \cos^۲ x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲) =$$
$$= ۳^۳ - ۹(۲ - \cos^۲ x)(۱ + \cos^۲ x) =$$
$$= ۹ - ۹\cos^۲ x + ۹\cos^۴ x;$$
$$b^۲ = ۱ + ۲\cos^۲ x + \cos^۴ x$$

بنابراین

$$۲(a^۳ + b^۳) + ۹b^۲ =$$
$$= ۲(۹ - ۹\cos^۲ x + ۹\cos^۴ x) + ۹(۱ + ۲\cos^۲ x + \cos^۴ x) =$$
$$= ۲۷ + ۲۷\cos^۴ x = ۲۷(۱ + \cos^۴ x)$$

۱۱۴. مقدار سمت چپ برابری را A می‌نامیم. اگر از دو اتحاد

$$\sec^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x} = ۱ + \operatorname{tg}^{۲}x;$$

$$\operatorname{cosec}^{۲}x = \frac{۱}{\sin^{۲} x} = ۱ + \cot^{۲} x$$

استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$A = \frac{۱ + \operatorname{tg}x + \cot x}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}x + \operatorname{tg}x} - \frac{\cot x}{۱ + \cot^{۲} x + \operatorname{tg}^{۲}x - \cot^{۲} x} =$$

$$= \frac{۱ + \operatorname{tg}x + \cot x}{\operatorname{tg}x(\cot x + \operatorname{tg}x + ۱)} - \frac{\operatorname{tg}x \cot x}{\operatorname{tg}x(۱ + \operatorname{tg}^{۲}x)} =$$

$$= \frac{۱}{\operatorname{tg}x} - \frac{۱}{\operatorname{tg}x(۱ + \operatorname{tg}^{۲}x)} = \frac{(۱ + \operatorname{tg}^{۲}x) - ۱}{\operatorname{tg}x(۱ + \operatorname{tg}^{۲}x)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}x}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos^{۲} x}{۱} = \sin x \cos x$$

که همان طرف دوم برابری است.

۱۱۵. داریم:

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg}x}{\cos x + \cot x} = \left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right) : \left(\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= \frac{\sin x(\cos x + ۱)}{\cos x} : \frac{\cos x(۱ + \sin x)}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^{۲} x(۱ + \cos x)}{\cos^{۲} x(۱ + \sin x)} = \operatorname{tg}^{۲}x\frac{۱ + \cos x}{۱ + \sin x}$$

x نمی‌تواند برابر کمانی باشد که انتهای آن در یکی از نقطه‌های ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π یا $\frac{۳\pi}{۲}$ قرار گیرد، زیرا در این نقطه‌ها $\operatorname{tg}x$ یا $\cot x$ بی معنی است.

به ازای بقیهٔ مقدار کمان x، نتیجه‌ای که برای کسر به دست آوردیم، همیشه مثبت است (منفی یا صفر نمی‌تواند باشد).

۱۱۶. در آغاز، به دو نکته اشاره کنیم:

۱) $\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$، به ازای هر مقدار درست k، برابر صفر است، زیرا اگر k عددی زوج باشد، انتهای کمان در نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ و، اگر k عددی فرد باشد، انتهای کمان در نقطهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ قرار می‌گیرد.

۲) کسینوس‌های هر دو کمانی که اختلافی برابر π (۱۸۰ درجه) داشته باشند، قرینهٔ یکدیگرند. به عنوان نمونه، دو کمان $k\pi+\frac{۳\pi}{۱۴}$ و $k\pi-\frac{۱۱\pi}{۱۴}$ تفاضلی برابر π دارند:

$$\left(k\pi+\frac{۳\pi}{۱۴}\right)-\left(k\pi-\frac{۱۱\pi}{۱۴}\right)=\frac{۳\pi}{۱۴}-\left(-\frac{۱۱\pi}{۱۴}\right)=\pi$$

برای حل مساله، اگر فرض کنیم:

$$n=۷k+۱$$

(که در آن، k عددی است درست و غیر منفی)، آن وقت عبارت مفروض، به ترتیب، به این صورت درمی‌آید:

$$\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{۷}-\frac{۱۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(۳k\pi+\frac{۳\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+$$
$$+\cos\left(۵k\pi+\frac{۵\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)=$$
$$=\cos\left(k\pi-\frac{۱۱\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(k\pi+\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$$

جملهٔ سوم برابر صفر و مقدارهای دو جمله اول، قرینهٔ یکدیگرند (هر جا لازم بود، $۲k\pi$ و $۴k\pi$ را از کمان کم کردیم، زیرا کسینوس آن تغییر نمی‌کند)؛ بنابراین، مجموع سه جمله، برابر صفر می‌شود.

یادداشت. اگر در تقسیم عدد طبیعی، به باقی‌مانده ۳ یا ۴ هم برسیم، باز هم حاصل عبارت، برابر صفر می‌شود (آزمایش کنید!).

۱۱۷. در آغاز، دو طرف برابری فرض را در $a+b$ ضرب می‌کنیم:

$$(a+b)\cdot\frac{\sin^{۴} x}{a}+(a+b)\frac{\cos^{۴} x}{b}=۱$$

در سمت چپ، ضرب‌ها را انجام می‌دهیم و، در سمت راست، به جای عدد ۱، مقدار مساوی آن $(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)^{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin^{۴} x+\frac{b}{a}\sin^{۴} x+\frac{a}{b}\cos^{۴} x+\cos^{۴} x=(\sin^{۲} x+\cos^{۲} x)^{۲}$$

توان سمت راست را عمل و، سپس، ساده می‌کنیم:

$$\frac{b}{a}\sin^{۴} x+\frac{a}{b}\cos^{۴} x-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x=۰$$

سمت چپ برابری را، می‌توان به صورت مجذور یک دوجمله‌ای نوشت:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^{۲} x-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^{۲} x\right)^{۲}=۰$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^{۲} x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^{۲} x$$

اگر دو طرف برابری را بر $\sqrt{ab}$ (که صفر نیست) تقسیم کنیم:

$$\frac{\sin^{۲} x}{a}=\frac{\cos^{۲} x}{b}$$

ولی، در دو نسبت مساوی، هر نسبت برابر است با نسبت مجموع صورت‌ها بر مجموع مخرج‌ها:

$$\frac{\sin^۲ x}{a} = \frac{\cos^۲ x}{b} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{a+b} = \frac{۱}{a+b}$$

اکنون داریم:

$$\frac{\sin^۸ x}{a^۳} + \frac{\cos^۸ x}{b^۳} = \sin^۲ x \left(\frac{\sin^۲ x}{a}\right)^۳ + \cos^۲ x \left(\frac{\cos^۲ x}{b}\right)^۳ =$$

$$= \sin^۲ x \cdot \frac{۱}{(a+b)^۳} + \cos^۲ x \cdot \frac{۱}{(a+b)^۳} =$$

$$= \frac{۱}{(a+b)^۳}(\sin^۲ x + \cos^۲ x) = \frac{۱}{(a+b)^۳}$$

و این، همان چیزی است که اثبات آن را لازم داشتیم.

۱۱۸. دو طرف برابری را در $\sin x + \cos x - ۱$ ضرب می‌کنیم، پس از عمل‌های ساده به دست می‌آید:

$$(a-b)\sin^۲ x + (a+b)\sin x \cos x + (c-a)\sin x +$$

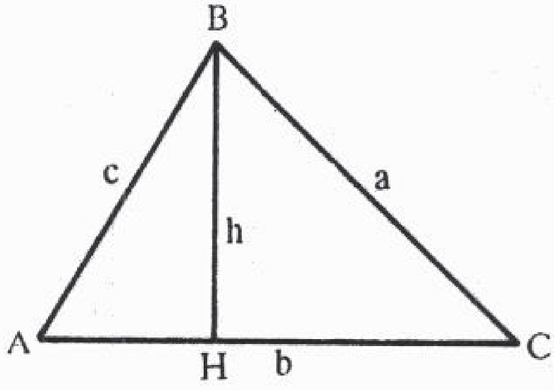
$$+ (c-b)\cos x + (b-c) = \sin x \cos x$$

برای این که این برابری، یک اتحاد باشد، باید ضریب‌های جمله‌های متشابه، در دوطرف برابری، با هم برابر باشند، یعنی

$$a-b=۰, a+b=۱, c-a=۰, c-b=۰, b-c=۰$$

که از آن‌ها، به سادگی نتیجه می‌شود:

$$a=b=c=\frac{۱}{۲}$$



شکل ۸۶

به این ترتیب، برابری زیر، یک اتحاد است:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-۱}=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}$$

۱۱۹. در مثلث غیر مشخص ABC (شکل ۸۶)، BH را ارتفاع مثلث و با طولی برابر h فرض می‌کنیم. طول ضلع‌های BC، AC و AB را، به ترتیب، برابر a، b و c فرض می‌کنیم. می‌دانیم، مساحت مثلث (S)، برابر است با نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع، یعنی

$$S=\frac{۱}{۲}b\cdot h \qquad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه CHB، داریم:

$$\sin\widehat{C}=\frac{h}{a}\Rightarrow h=a\sin\widehat{C}$$

که اگر در برابری (۱) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

۱۲۰. داریم

$$\frac{۳\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-۳\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(۳\mathrm{tg}\alpha+۱)}{\cos\alpha(۱-۳\mathrm{tg}\alpha)}=\frac{۳\mathrm{tg}\alpha+۱}{۱-۳\mathrm{tg}\alpha}=$$

$$= \frac{-۲۱+۱}{۱+۲۱} = -\frac{۲۰}{۲۲} = -\frac{۱۰}{۱۱}$$

نمودارها

۱۲۱. جدول و نمودار هر یک از معادله‌های ۱ تا ۶ را، در شکل‌های ۸۷ تا ۹۲ در صفحه‌های ۳۱۴ و ۳۱۵ ببینید.

۱۲۲. ۱) هر خط راست موازی محور $y'y$، معادله‌ای به صورت $x = m$ دارد؛ و معادلهٔ (۱) وقتی به این صورت درمی‌آید که، در آن، ضریب y برابر صفر شود:

$$۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

در این صورت، معادلهٔ (۱) به صورت $x = ۳$ درمی‌آید که نمودار آن، با محور $y'y$ موازی است.

۲) پاسخ. $a = ۱$. معادلهٔ (۱) به صورت $y = -۱$ درمی‌آید.

۳) برای این که خط راستی از مبداء مختصات بگذرد، باید مختصات مبداء، یعنی $(۰, ۰)$ در آن صدق کند.

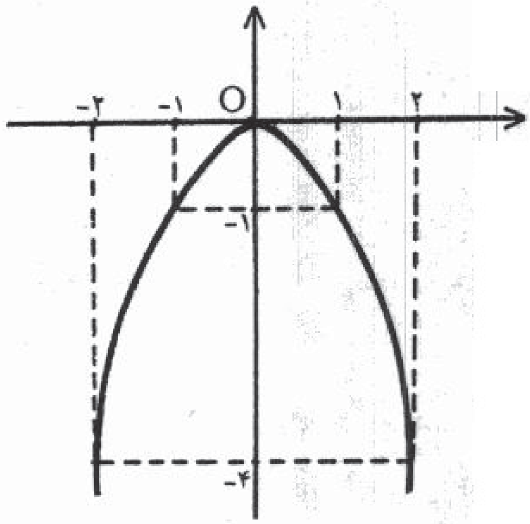
پاسخ. $a = ۳$ و معادلهٔ خط راست (۱)، به صورت $x + ۳y = ۰$ درمی‌آید.

۴) ضریب زاویهٔ خط راست (۱)، برابر $\frac{۱-a}{۲a}$ است (چرا؟) و، اگر بخواهیم با نیمساز ربع‌های اول و سوم موازی باشد، باید این ضریب زاویه برابر ۱ شود (چرا؟):

$$\frac{۱-a}{۲a} = ۱ \Rightarrow ۲a = ۱ - a \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$

$1)\ y = -x^۲ \leq ۰$

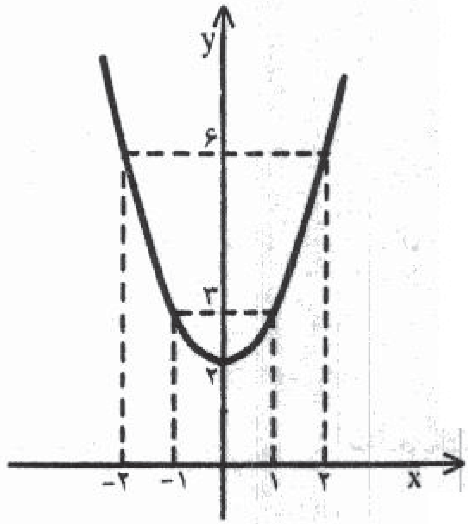
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۴	-۱	۰	-۱	-۴



شکل ۸۷

$2)\ y = x^۲ + ۲ \geq ۲$

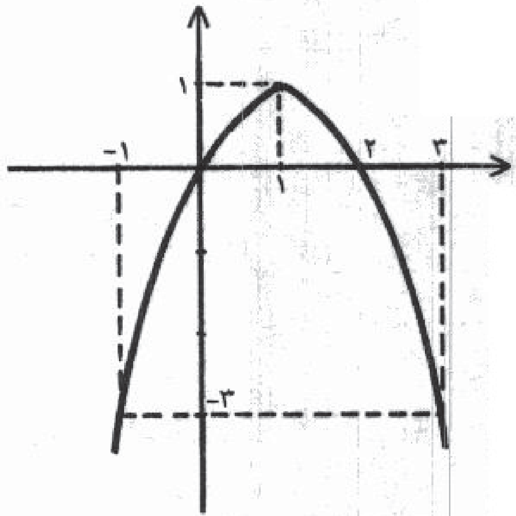
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۶	۳	۲	۳	۶



شکل ۸۸

$3)\ y = -x^۲ + ۲x = -(x-۱)^۲ + ۱ \leq ۱$

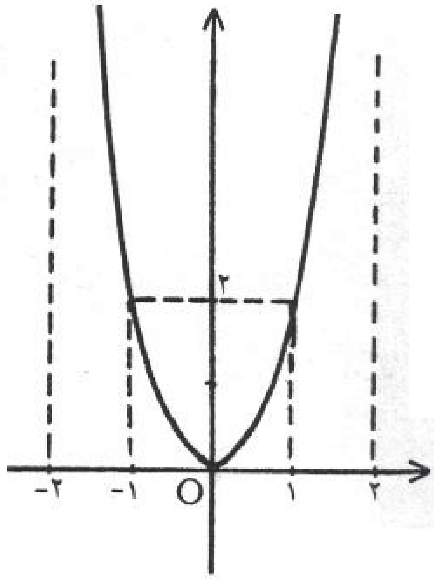
x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۳	۰	۱	۰	-۳



شکل ۸۹

$۴) y = x^۴ + x^۲ \geq ۰$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۲۰	۲	۰	۲	۲۰

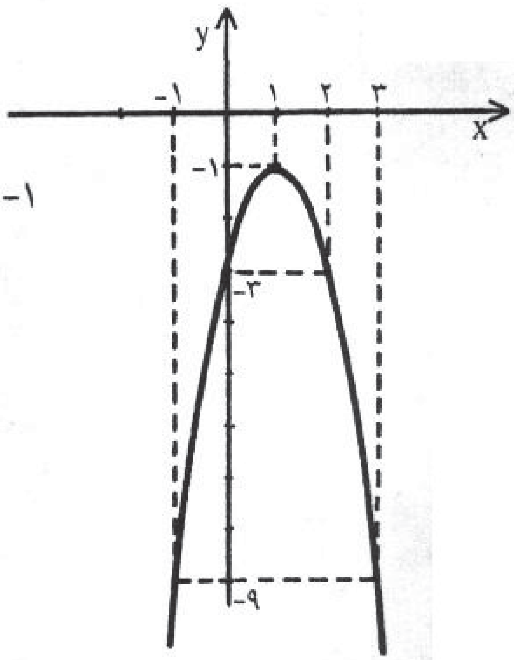


شکل ۹۰

$۵) y = -۲x^۲ + ۴x - ۳ = -۲(x^۲ - ۲x) - ۳ =$

$= -۲(x-۱)^۲ + ۲ - ۳ = -۲(x-۱)^۲ - ۱ \leq -۱$

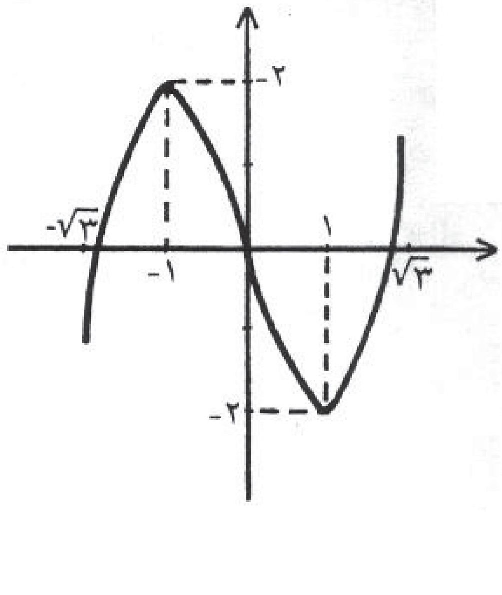
x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۹	-۳	-۱	-۳	-۹



شکل ۹۱

$y = x^۳ - ۳x$

x	$-\sqrt{۳}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{۳}$
y	۰	۲	۰	-۲	۰



شکل ۹۲

۵) باید ضریب زاویهٔ خط راست، برابر ۱ − باشد:

$$\frac{۱ - a}{۲a} = -۱ \Rightarrow ۱ - a = -۲a \Rightarrow a = -۱$$

۶) نقطه‌ای از محور $x'x$ که طولی برابر ۲ − دارد، به‌مختصات (۰, ۲−) است. باید مختصات این نقطه، در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$(a - ۱)(-۲) = a - ۳ \Rightarrow a = \frac{۵}{۳}$$

۷) با قرار دادن $y = ۲$ در معادلهٔ $x + y = ۳$، مختصات نقطه‌ای به دست می‌آید که، خط راست (۱)، از آن می‌گذرد: (۱, ۲). مختصات این نقطه، باید در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$(a - ۱) + ۴a = a - ۳ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۸) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط راست $\left(۰, \frac{۱}{۵}\right)$ است (همان نقطهٔ برخورد خط راست $۷x + ۵y = ۱$ با محور $y'y$). مختصات این نقطه، باید در معادلهٔ (۱) صدق کند:

$$\frac{۲}{۵}a = a - ۳ \Rightarrow a = ۵$$

۹) اگر $y = ۱$ (عرض نقطهٔ برخورد) را در معادله‌های خط‌های راست قرار دهیم، برای طول نقطهٔ برخورد مقدارهای $x = -(۲a + ۱)$ و $x = -\frac{a + ۳}{a - ۱}$ به دست می‌آید، که باید با هم برابر باشند:

$$۲a + ۱ = \frac{a + ۳}{a - ۱} \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰$$

از آن‌جا، برای a، عددهای ۲ و ۱− به دست می‌آید. به ازای $a = ۲$، با دو خط راست

$$x + ۴y + ۱ = ۰ \text{ و } x + ۲y + ۳ = ۰$$

سروکار پیدا می‌کنیم که در نقطهٔ (۱ ,۵−) به هم می‌رسند و به‌ازای $a = -۱$ با دو خط راست

$$x + y - ۲ = ۰, x - y = ۰$$

که نقطه برخورد آن‌ها (۱ و ۱) است.

۱۰) باید داشته باشیم:

$$\frac{|a - ۳|}{\sqrt{(a - ۱)^۲ + ۴a^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

که با مجذور کردن دو طرف این برابری و انجام عمل‌های ساده، به دست می‌آید

$$۲۸a = ۴۴ \Rightarrow a = \frac{۱۱}{۷}$$

۱۱) حاصل ضرب ضریب زاویه‌های دو خط راست را، برابر ۱− قرار می‌دهیم:

$$-\frac{a - ۱}{۲a} \times \frac{a}{۲a + ۱} = -۱ \Rightarrow \frac{a - ۱}{۴a + ۲} = ۱$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $a = -۱$.

۱۲) همهٔ جمله‌های معادله را، به سمت چپ برابری منتقل و نسبت به پارامتر a، منظم می‌کنیم:

$$(x + ۲y - ۱)a + (۳ - x) = ۰$$

این برابری، وقتی نسبت به a، یک اتحاد است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + ۲y - ۱ = ۰ \\ ۳ - x = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۳ \\ y = -۱ \end{array} \right.$$

خط راست مفروض، از نقطهٔ ثابت (۱− و ۳)، به ازای همهٔ مقدارهای a می‌گذرد.

۱۲۳. نمودار $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$، در دو حالت، به خط راست تبدیل می‌شود:

۱) وقتی که داشته باشیم: $a' = ۰$ و $b' \neq ۰$ که، در این صورت، خواهیم داشت:

$$y = \frac{ax + b}{b'} = \frac{a}{b'}x + \frac{b}{b'}$$

که خط راستی است با ضریب زاویه‌ای برابر $\frac{a}{b'}$.

۲) وقتی که داشته باشیم:

$$a' \neq ۰, b' \neq ۰ \text{ و } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

زیرا با فرض $k = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$، به دست می‌آید:

$$a = a'k \text{ و } b = b'k$$

و در نتیجه

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{k(a'x + b')}{a'x + b'} = k$$

یعنی خط راستی موازی محور $x'x$.

۱۲۴. ۴) معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$(x+y)(x-y)=۰ \Rightarrow y=\pm x$$

مجموعهٔ نیمسازهای ربع اول و سوم، و ربع دوم و چهارم، نمودار معادله را تشکیل می‌دهند؛

۵) داریم:

$$x^۲+x-۶=(x-۲)(x+۳)=۰$$

بنابراین، نمودار معادله، عبارت است از دو خط راست $x=-۳$ و $x=۲$ (که با محور $y'y$ موازی‌اند).

۶) پاسخ. محور $x'x(y=۰)$ و نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$؛

۷) داریم:

$$x^۲y-۷xy+۱۰y=y(x^۲-۷x+۱۰)=$$
$$=y(x-۲)(x-۵)$$

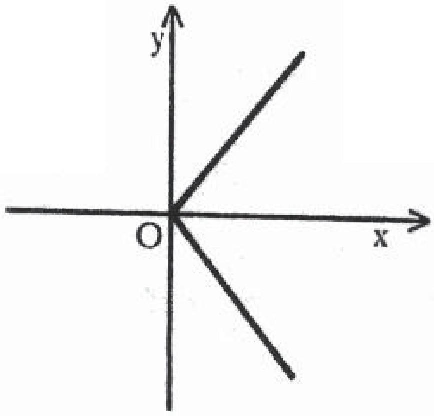
بنابراین، نمودار معادله، عبارت است از محور $x'x(y=۰)$ و دو خط راست موازی محور $y'y$ ($x=۲$ و $x=۵$)؛

۸) برای معادله، دو حالت وجود دارد:

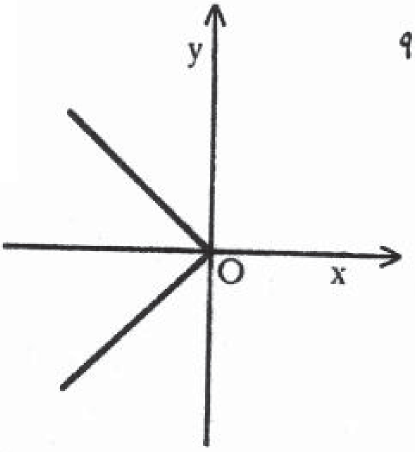
$$۱)\ y\geq ۰ \Rightarrow y=x$$
$$۲)\ y< ۰ \Rightarrow y=-x$$

نمودار $x=|y|$، در شکل ۹۳ داده شده است؛

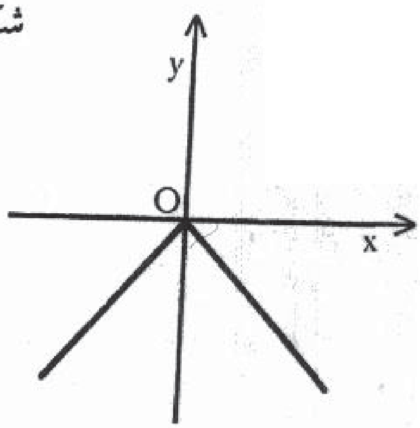
۹) شکل ۹۴ را ببینید.



شکل ۹۳



شکل ۹۴. نمودار $x+|y| = 0$



شکل ۹۵. نمودار $y+|x| = 0$

۱۰) شکل ۹۵ را ببینید؛

۱۱) نمودار $y = x + 1$ را رسم کنید و، سپس، قرینهٔ بخشی از آن را که در زیر محور $x'x$ قرار دارد، نسبت به این محور به دست آورید.

۱۲) برای $x \geq 0$ داریم $y = 2x$ و برای $x < 0$ داریم $y = 0$ (شکل ۹۶).

۱۳) اگر $x < 0$، آن‌گاه $y = -2x$ و اگر $x \geq 0$، آن‌گاه $y = 0$ (شکل ۹۷).

۱۴) به این جدول توجه کنید:

به این ترتیب:

x		-2		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$

اگر $x < -۲$، آن وقت $|x + ۲| = -(x + ۲)$ و $|x - ۱| = -(x - ۱)$، یعنی

$$y = -(x - ۱) + (x + ۲) = ۳, (x < -۲)$$

اگر $-۲ \leq x < ۱$، آن وقت $x + ۲ \geq ۰$ و $x - ۱ < ۰$، یعنی

$$y = -(x - ۱) - (x + ۲) = -۲x + ۳, (-۲ \leq x < ۱)$$

اگر $x \geq ۱$، آن وقت $x + ۲ > ۰$ و $x - ۱ \geq ۰$، یعنی

$$y = (x - ۱) - (x + ۲) = -۳, (x \geq ۱)$$

نمودار $y = |x - ۱| - |x + ۲|$ را در شکل ۹۸ ببینید.

۱۵) تنها مختصات مبداء در معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۰$ صدق می‌کند؛ نمودار، از یک نقطهٔ منفرد تشکیل شده است.

۱۶) معادلهٔ مفروض، به سادگی، به این صورت درمی‌آید:

$$(x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۰$$

که تنها مختصات، نقطه $(۱, -۲)$ در آن صدق می‌کند.

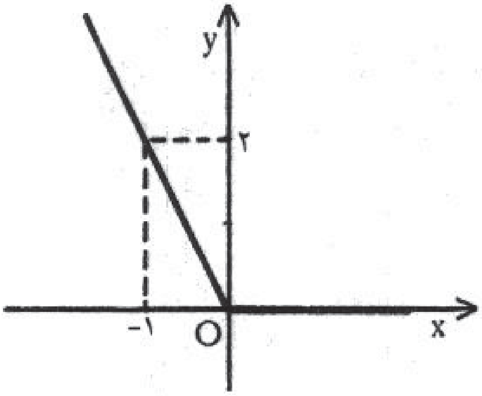
۱۷) نمی‌توان دو عدد حقیقی، برای x و y، پیدا کرد که در معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ + ۲ = ۰$$

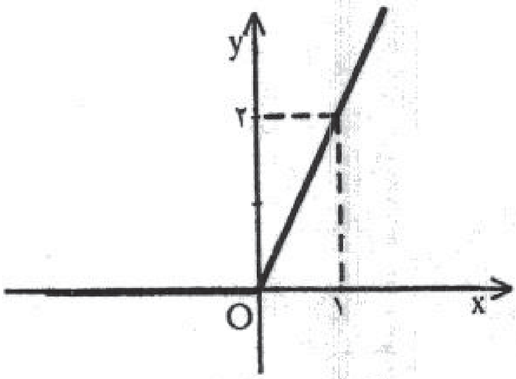
صدق کنند ($x^۲ + y^۲ + ۲$، همیشه مثبت است و هرگز برابر صفر نمی‌شود).

۱۸) چهار حالت ممکن است:

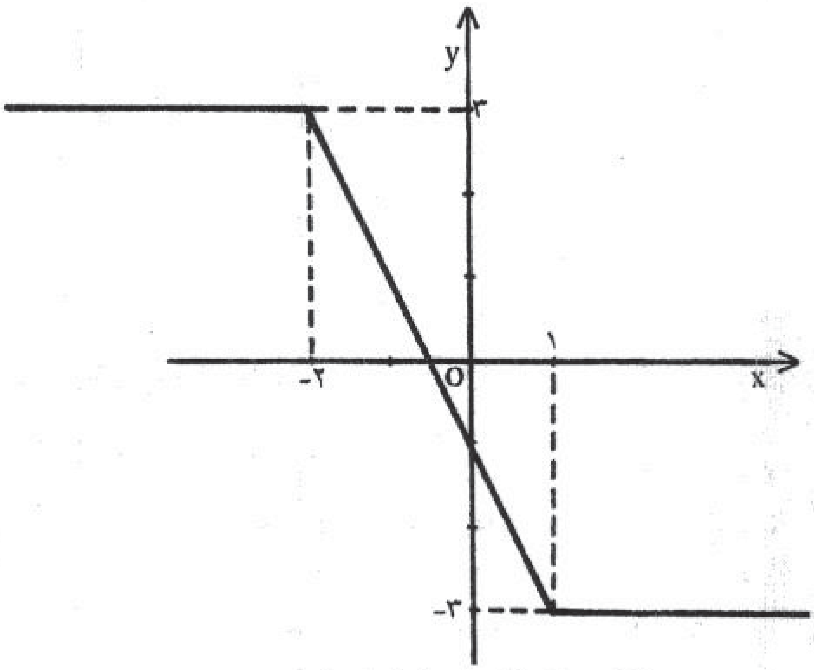
$$۱)\ x \geq ۰, y \geq ۰ \Rightarrow x + y = ۱$$



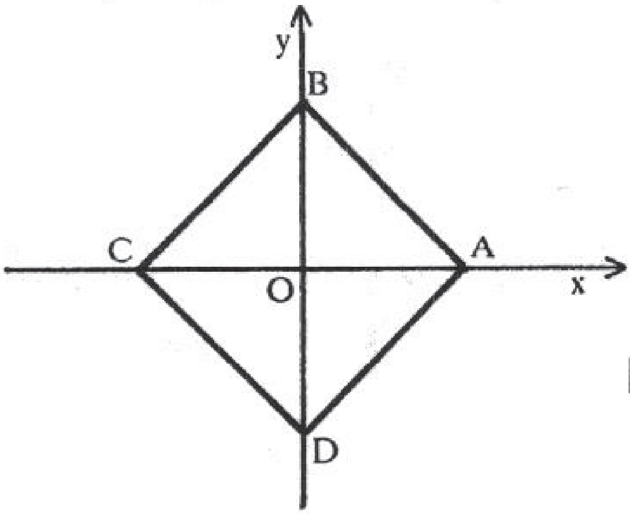
شکل ۹۷. $y=|x|-x$



شکل ۹۶. $y=x+|x|$



شکل ۹۸. $y=|x-1|-|x+2|$



شکل ۹۹. $|x|+|y|=1$

از خط راست $x + y = ۱$، تنها پاره‌خط راست AB (شکل ۹۹)، بخشی از نمودار تابع است (نقطه‌های واقع بر پاره‌خط راست AB، طول و عرض مثبت دارند).

$$۲)\ x \leq ۰, y \geq ۰ \Rightarrow -x + y = ۱$$

که نمودار آن، پاره‌خط راست BC (شکل ۹۹) است.

$$۳)\ x \leq ۰, y \leq ۰ \Rightarrow -x - y = ۱$$

که پاره‌خط راست CD (شکل ۹۹) نمودار آن است.

$$۴)\ x \geq ۰, y \leq ۰ \Rightarrow x - y = ۱$$

که نمودار آن، پاره‌خط راست DA است.

نمودار $|x| + |y| = ۱$، عبارت است از نقطه‌های واقع بر محیط مربع $ABCD$ که، مرکز آن، در مبداء مختصات و، قطر آن، برابر ۲ است.

۱۲۵. برای پیدا کردن مختصات نقطه‌های برخورد دو نمودار، باید با معادله‌های آن‌ها، یک دستگاه شامل دو معادلهٔ دو مجهولی تشکیل داد. با حل چنین دستگاهی، مختصات نقطه‌های برخورد، به دست می‌آید.

۱) از معادلهٔ دوم دستگاه داریم $x = y$. در معادلهٔ اول دستگاه قرار می‌دهیم، به این معادلهٔ ساده می‌رسیم:

$$۲x^۲ = ۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

دو نقطهٔ برخورد، برای نمودارها به دست می‌آید:

$$A(۲, ۲), B(-۲, -۲)$$

۲) در معادلهٔ اول دستگاه، $y=-x$ قرار می‌دهیم. دو نمودار، دارای یک نقطهٔ برخورد هستند: $M\left(-\frac{۹}{۱۰},\frac{۹}{۱۰}\right)$؛

۳) از تفاضل دو معادله، به دست می‌آید:

$$-۸x+۱۰y-۱۲=۰\Rightarrow y=\frac{۴x+۶}{۵} \qquad (*)$$

این مقدار y را در معادلهٔ $x^۲+y^۲=۵$ قرار می‌دهیم؛ به ترتیب خواهیم داشت:

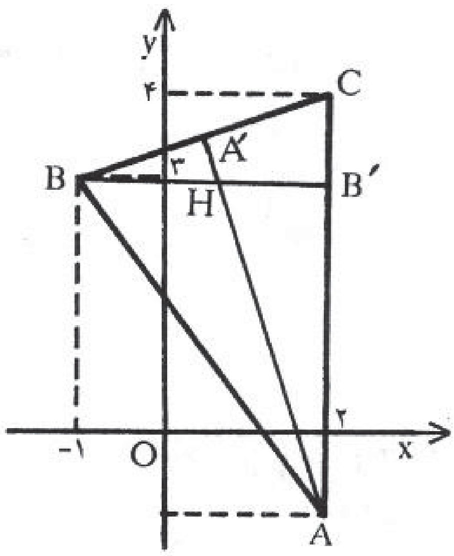
$$x^۲+\left(\frac{۴x+۶}{۵}\right)^۲=۵ \qquad ;$$
$$۴۱x^۲+۴۸x-۸۹=۰;$$
$$(۴۱x^۲-۴۱x)+(۸۹x-۸۹)=۰;$$
$$۴۱x(x-۱)+۸۹(x-۱)=۰;$$
$$(x-۱)(۴۱x+۸۹)=۰;$$
$$x=۱ \text{ و } x=-\frac{۸۹}{۴۱}$$

که با قرار دادن آن‌ها، در معادلهٔ $(*)$، مقدارهای y به دست می‌آید. نمودارها، دو نقطهٔ برخورد دارند:

$$P(۱,۲) \text{ و } Q\left(-\frac{۸۹}{۴۱},-\frac{۲۲}{۴۱}\right)$$

۱۲۶. از حل دستگاه شامل معادله‌های دو خط راست AB و AC، مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید:

$$\begin{matrix}(AB)\\(AC)\end{matrix}\begin{cases}۴x+۳y-۵=۰\\x-۲=۰\end{cases}\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$$



شکل ۱۰۰

به همین ترتیب، دو معادلهٔ خط‌های راست AB و BC، مختصات نقطهٔ B، و معادلهٔ خط‌های راست AC و BC، مختصات نقطه C را به ما می‌دهند:

$$B(-۱,۳) \text{ و } C(۲,۴)$$

قاعدهٔ AC موازی محور عرض است و، بنابراین، طول ارتفاع BB'، به سادگی و با توجه به شکل ۱۰۰، به دست می‌آید:

$$|BB'| = ۳$$

طول قاعدهٔ AC هم، از روی شکل ۱۰۰ روشن است:

$$|AC| = ۵$$

و بنابراین، مساحت مثلث، برابر $۷\frac{۱}{۲}$ واحد مربع می‌شود.

از حل معادلهٔ دو ارتفاع BB' و AA' با یکدیگر، مختصات نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاع‌ها، به دست می‌آید. معادلهٔ ارتفاع BB'، عبارت است از $y = ۳$. ضریب زاویهٔ خط راست AA'، عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط

راست BC، یعنی برابر ۳− است و چون AA' از نقطهٔ A می‌گذرد، برای معادلهٔ آن داریم:

$$y + ۱ = -۳(x - ۲) \Rightarrow ۳x + y - ۵ = ۰$$

و برای مختصات نقطهٔ H:

$$\begin{cases} ۳x + y - ۵ = ۰ \\ y = ۳ \end{cases} \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} \frac{۲}{۳} \\ ۳ \end{array} \right.$$

۱۲۷. خط‌های راست $x + y - ۴ = ۰$ و $x - ۲y - ۱ = ۰$، موازی نیستند (چرا؟) و بنابراین، محل برخورد آن‌ها، یکی از راس‌های متوازی‌الاضلاع را می‌دهد. این راس را A می‌نامیم:

$$\begin{cases} x + y - ۴ = ۰ \\ x - ۲y - ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} ۳ \\ ۱ \end{array} \right.$$

مختصات نقطهٔ A، در معادلهٔ قطر صدق می‌کند؛ بنابراین

$$x - ۴y + ۱ = ۰$$

معادلهٔ قطر AC از متوازی‌الاضلاع است (در ضمن، اگر سه خط راست را، در دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، می‌بینیم که، قطر، بین دو ضلع قرار گرفته است و می‌تواند قطر باشد). نقطهٔ برخورد این قطر با محور طول، نقطهٔ $M(-۱, ۰)$، یعنی محل برخورد قطرها است (مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع، در نقطهٔ برخورد قطرهای آن است.) نقطهٔ برخورد قطرها، در وسط هر قطر قرار دارد. یعنی

$$۲x_M = x_A + x_C \Rightarrow -۲ = ۳ + x_C \Rightarrow x_C = -۵;$$

$$۲y_M = y_A + y_C \Rightarrow ۰ = ۱ + y_C \Rightarrow y_C = -۱$$

مختصات راس C معلوم شد: $C(-۵, -۱)$.

ضلع CB با ضلع AD موازی است. بنابراین، ضریب زاویه‌های برابر دارند: $m = \frac{۱}{۲}$. معادله خط راستی را می‌نویسیم که از نقطهٔ C بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}$ داشته باشد:

$$y + ۱ = \frac{۱}{۲}(x + ۵) \Rightarrow x - ۲y + ۳ = ۰$$

از حل این معادله، با معادله $x + y - ۴ = ۰$ (معادله ضلع AB)، به مختصات نقطهٔ B می‌رسیم: $B\left(\frac{۵}{۳}, \frac{۷}{۳}\right)$. مختصات راس D به سادگی به دست می‌آید (پیدا کنید!).

۱۲۸. طول قاعدهٔ AB برابر $\sqrt{۲۶}$ می‌شود. چون مساحت مثلث برابر ۸ است، بنابراین طول ارتفاع CH، برابر است با

$$|CH| = ۸ : \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶} = \frac{۱۶}{\sqrt{۲۶}}$$

معادلهٔ خط راست AB را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y + ۲}{x - ۱} = ۵ \Rightarrow ۵x - y - ۷ = ۰$$

طول نقطهٔ C را α فرض می‌کنیم. چون، نقطهٔ C، روی خط راست $۲x + y - ۲ = ۰$ قرار دارد، بنابراین عرض آن، برابر $۲ - ۲\alpha$ می‌شود. با استفاده از دستور فاصلهٔ یک نقطه از یک خط راست، طول ارتفاع CH، بر حسب α به دست می‌آید:

$$|CH| = \frac{|۵\alpha - (۲ - ۲\alpha) - ۷|}{\sqrt{۵^۲ + ۱^۲}} = \frac{|۷\alpha - ۹|}{\sqrt{۲۶}}$$

به این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$\frac{|۷\alpha - ۹|}{\sqrt{۲۶}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۲۶}} \Rightarrow ۷\alpha - ۹ = \pm ۱۶$$

از آن‌جا α، یعنی طول نقطهٔ C و، سپس، با قرار دادن در معادلهٔ خط راست $۲x + y - ۲ = ۰$، عرض نقطهٔ C به دست می‌آید.

پاسخ. مساله دو جواب دارد (C می‌تواند در یکی از دو طرف خط راست AB واقع باشد): $C(-۱, ۴)$ یا $C\left(\frac{۲۵}{۷}, -\frac{۳۶}{۷}\right)$.

۱۲۹. وقتی عرض از مبداء خط راست، برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، به این معناست که خط راست، از نقطه $\left(۰, \frac{۲}{۳}\right)$ می‌گذرد. با در دست داشتن ضریب زاویهٔ خط راست، معادلهٔ آن به دست می‌آید:

$$y - \frac{۲}{۳} = -\frac{۱}{۳}(x - ۰) \Rightarrow x + ۳y - ۲ = ۰$$

۱۳۰. *پاسخ.* ۱) $۵x + ۳y - ۱۳ = ۰$ (موازی با خط راست مفروض)؛

۲) $۳x - ۵y - ۱۱ = ۰$ (عمود بر خط راست مفروض).

۱۳۱. دو خط راست

$$۲x - ۳y + ۵ = ۰ \text{ و } ۳x + ۲y - ۷ = ۰$$

بر هم عمودند (چرا؟)، بنابراین معادله‌های دو ضلع مجاور مستطیل‌اند. مختصات راس A، در هیچ کدام از این دو معادله صدق نمی‌کند، بنابراین، دو ضلع دیگر مستطیل، از A می‌گذرند و با دو ضلع مفروض موازی‌اند.

پاسخ. $۳x + ۲y = ۰$ و $۲x - ۳y - ۱۳ = ۰$.

۱۳۲. دو خط راست $x - ۲y = ۰$ و $x - ۲y + ۱۵ = ۰$ با هم موازی‌اند؛ بنابراین، معادله‌های دو ضلع رو به رو از مستطیل‌اند، ضمن حل

هر یک از آن‌ها، با معادلهٔ قطر، مختصات یکی از راس‌های مستطیل به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x - ۲y = ۰ \\ ۷x + y + ۱۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} -۲ \\ -۱ \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} x - ۲y + ۱۵ = ۰ \\ ۷x + y + ۱۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} -۳ \\ ۶ \end{matrix} \right.$$

ضلع BC، از C می‌گذرد و بر $x - ۲y + ۱۵ = ۰$ عمود است؛ همچنین ضلع AD از A می‌گذرد و بر $x - ۲y = ۰$ عمود است. بنابراین معادلهٔ هر کدام از آن‌ها، به سادگی به دست می‌آید:

$$(BC) \text{ معادلهٔ } : \quad ۲x + y = ۰$$
$$(AD) \text{ معادلهٔ } : \quad ۲x + y + ۵ = ۰$$

اکنون دیگر، نقطهٔ B از برخورد (AB) و (BC)، و نقطهٔ D از برخورد (AD) و (CD) به دست می‌آید: $B(۰, ۰)$ و $D(-۵, ۵)$.

۱۳۳. تصویر P بر خط راست، یعنی پای عمودی که از P بر خط راست رسم می‌شود. پای عمود را H می‌نامیم و معادلهٔ خط راست PH را (که از P می‌گذرد و بر خط راست مفروض عمود است) پیدا می‌کنیم:

$$y - ۴ = -\frac{۵}{۴}(x + ۶) \Rightarrow ۵x + ۴y + ۱۴ = ۰$$

تصویر P، نقطهٔ برخورد این خط راست، با خط راست مفروض است:

$$\begin{cases} ۴x - ۵y + ۳ = ۰ \\ ۵x + ۴y + ۱۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow H \left| \begin{matrix} -۲ \\ -۱ \end{matrix} \right.$$

۱۳۴. تصویر نقطهٔ P را بر خط راست $۲x - ۳y - ۳ = ۰$، نقطهٔ M می‌نامیم. اگر قرینهٔ P نسبت به این خط راست، نقطهٔ P' باشد، نقطهٔ M وسط پاره‌خط راست PP' است.

پاسخ. نقطهٔ $P'(11, -11)$، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط راست مفروض است.

۱۳۵. از نقطهٔ $A(0, 2)$ واقع بر خط راست $2x + 3y - 6 = 0$، عمودی بر آن رسم می‌کنیم (نقطهٔ A را می‌توان، در هر جای دیگر این خط راست و، در جایی واقع بر خط راست دوم انتخاب کرد). این عمود، ضریب زاویه‌ای برابر $\frac{3}{2}$ دارد و، بنابراین، معادلهٔ آن چنین است:

$$y - 2 = \frac{3}{2}x \Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0$$

نقطهٔ B، محل برخورد این عمود با خط راست دوم، به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 6y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{29}{13}, -\frac{35}{26}\right)$$

مختصات نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست AB به سادگی به دست می‌آید:

$$H\left(-\frac{29}{26}, \frac{17}{52}\right)$$

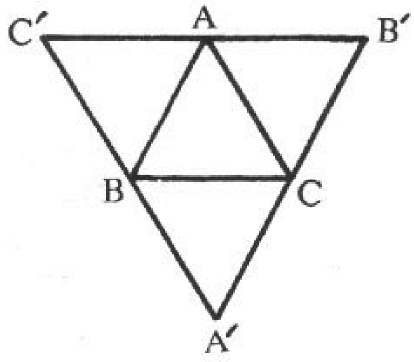
خط راستی که از نقطهٔ H موازی یکی از خط‌های راست مفروض (یعنی با ضریب زاویه $-\frac{2}{3}$ رسم شود)، خط راست مورد نظر است.

پاسخ. $8x + 12y + 5 = 0$.

۱۳۶. می‌توان ابتدا ضریب زاویهٔ هر یک از خط‌های راستی را که از ضلع‌های مثلث می‌گذرند، پیدا کرد.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 + 4}{-1 - 5} = -\frac{7}{6};$$

$$m_{AC} = \frac{-2 + 4}{-3 - 5} = -\frac{1}{4}; m_{BC} = \frac{-2 - 3}{-3 + 1} = \frac{5}{2}$$



شکل ۱۰۱

سپس معادله ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را نوشت و، بعد، مختصات راس‌ها را به دست آورد.

ولی در واقع، نیازی به این عمل‌ها نیست. هر یک از چهار ضلعی‌های $ABA'C$، $ABCB'$ و $AC'BC$ متوازی‌الاضلاع‌اند (شکل ۱۰۱) و، بنابراین، مثلاً برای $ABA'C$ می‌توان نوشت:

$$x_A + x_{A'} = x_B + x_C \Rightarrow x_{A'} = -۹,$$
$$y_A + y_{A'} = y_B + y_C \Rightarrow y_{A'} = ۵$$

و به همین ترتیب، برای راس‌های B' و C'.

پاسخ. $A'(-۹, ۵)$، $B'(۳, -۹)$ و $C'(۷, ۱)$.

۱۳۷. شبیه مسالهٔ قبل، می‌توان مختصات نقطه‌های A، B و C و، سپس، معادله‌های ضلع‌های مثلث ABC را پیدا کرد.

۱۳۸. ضریب زاویهٔ خط راست OA برابر ۳ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ خط راست d، برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. d از نقطهٔ A می‌گذرد، بنابراین، برای معادلهٔ آن داریم:

$$y - ۳ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \Rightarrow x + ۳y - ۱۰ = ۰$$

۱۳۹. $B_۱$ وسط AC است، یعنی $B_۱(۲,۲)$. ضریب زاویهٔ میانهٔ $BB_۱$ برابر $\frac{۲-۱}{۲+۲}$، یعنی $\frac{۱}{۴}$ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ خط راست عمود بر آن، برابر ۴− است. باید معادلهٔ خط راست با ضریب زاویهٔ ۴− را، که از $A(۱,-۱)$ می‌گذرد، بنویسیم:

$$y+۱=-۴(x-۱) \Rightarrow ۴x+y-۳=۰$$

۱۴۰. پاسخ. $A(-۷,۰)$ و $B\left(۰,\frac{۷}{۳}\right)$.

۱۴۱. معادله‌های قطرها، به صورت

$$x-۲y+۵=۰ \text{ و } ۳x-y=۰$$

درمی‌آیند و مختصات نقطهٔ برخورد آن‌ها $(۱,۳)$ است.

۱۴۲. *راهنمائی.* نقطهٔ برخورد قطرها، وسط هر یک از دو قطر است و بنابراین،

$$x_A+x_C=۲x_Q \text{ و } y_A+y_C=۲y_Q;$$
$$x_B+x_D=۲x_Q \text{ و } y_B+y_D=۲y_Q$$

از این‌جا، مختصات دو نقطهٔ C و D و، سپس، معادلهٔ هر ضلع به دست می‌آید.

۱۴۳. باید ضریب زاویهٔ خط راست $M_۱M_۲$ با ضریب زاویهٔ خط راست $M_۱M_۳$ برابر باشد:

$$\frac{y_۱-y_۲}{x_۱-x_۲}=\frac{y_۱-y_۳}{x_۱-x_۳}$$

۱۴۴. حل مسالهٔ ۱۳۲ را ببینید.

۱۴۵. برای این که خط راستی، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، باید یا با خط راست AB موازی باشد و یا از نقطهٔ وسط پاره‌خط راست

AB بگذرد. در حالت اول، ضریب زاویهٔ چنین خط راستی، با ضریب زاویهٔ خط راست AB برابر است

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-۱۵ - ۳}{۱۱ + ۷} = -۱$$

اکنون، معادلهٔ خط راستی را می‌نویسیم که از $P(۳, ۵)$ بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر ۱− داشته باشد:

$$y - ۵ = -(x - ۳) \Rightarrow x + y - ۸ = ۰$$

در حالت دوم، مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط راست AB را پیدا می‌کنیم.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{۲} = ۲, y_C = \frac{y_A + y_B}{۲} = -۹$$

در این صورت، خط راستی که از $P(۳, ۵)$ و $C(۲, -۹)$ می‌گذرد، خط راست مورد نظر راست:

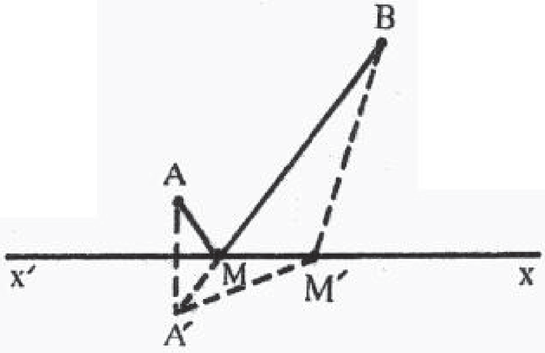
$$\frac{y - ۵}{x - ۳} = \frac{۵ + ۹}{۳ - ۲} \Rightarrow ۱۴x - y = ۳۷$$

۱۴۶. حل مسالهٔ ۱۳۳ را ببینید.

۱۴۷. به شکل ۱۰۲ توجه کنید: دو نقطهٔ A و B در بیرون خط راست $x'x$ واقع‌اند. A' قرینهٔ A نسبت به خط راست $x'x$ و M نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست BA' با $x'x$ است. مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B، برابر با طول پاره‌خط راست $|A'B|$ می‌شود (چرا؟)، ولی اگر M را در جای دیگری از $x'x$. و مثلاً در M' بگیریم، آن وقت

$$|M'A| + |M'B| = |M'A'| + |M'B| > |A'B|$$

(در هر مثلث، مجموع طول‌های دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگتر است).



شکل ۱۰۲

M نقطه‌ای از $x'x$ است که، مجموع فاصله‌های آن، از دو نقطهٔ A و B، کمترین مقدار ممکن است.

در حالتی که A و B در دو طرف $x'x$ باشند، نقطهٔ M در نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست AB با $x'x$ واقع است (چرا؟).

در مسالهٔ ۱۴۷، نقطه‌های A و B عرض‌های مثبت دارند و هر دو در بالای محور $x'x$ واقع‌اند. وقتی قرینهٔ A را نسبت به $x'x$ پیدا کنیم، نقطهٔ A' به دست می‌آید که طولی برابر طول نقطهٔ A و عرضی برابر قرینهٔ عرض نقطهٔ A پیدا می‌کند: $A'(-۳, -۲)$. معادلهٔ خط راست $A'B$ چنین است:

$$\frac{y-۵}{x-۲}=\frac{۵+۲}{۲+۳}=\frac{۷}{۵}\Rightarrow ۷x-۵y+۱۱=۰$$

که از برخورد آن با محور $x'x$، نقطهٔ M به دست می‌آید: $M\left(-\frac{۱۱}{۷}, ۰\right)$.

۱۴۸. خط راست $۲x-y-۵=۰$، در یک طرف خط راستی است که از دو نقطهٔ M و N می‌گذرد. بنابراین، حل مساله، کاملاً شبیه حل مساله ۱۴۷ است.

برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به خط راست مفروض، ابتدا معادلهٔ خط راستی را می‌نویسیم که از M بگذرد و بر خط راست مفروض عمود

باشد:

$$y - ۱ = -\frac{۱}{۲}(x + ۷) \Rightarrow x + ۲y + ۵ = ۰$$

اگر این معادله را با معادلهٔ خط راست مفروض، در یک دستگاه قرار دهیم، جواب دستگاه، مختصات پای عمود را (که H می‌نامیم) به ما می‌دهد:

$$\begin{cases} x + ۲y + ۵ = ۰ \\ ۲x - y - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} ۱ \\ -۳ \end{array} \right.$$

برای مختصات M' (قرینهٔ M نسبت به خط راست $۲x - y - ۵ = ۰$)، چون H وسط MM' است، داریم:

$$x_M + x_{M'} = ۲x_H \Rightarrow x_{M'} = ۹$$
$$y_M + y_{M'} = ۲y_H \Rightarrow y_{M'} = -۷$$

معادلهٔ خط راستی را می‌نویسیم که از $N(-۵, ۵)$ و $M'(۹, -۷)$ بگذرد:

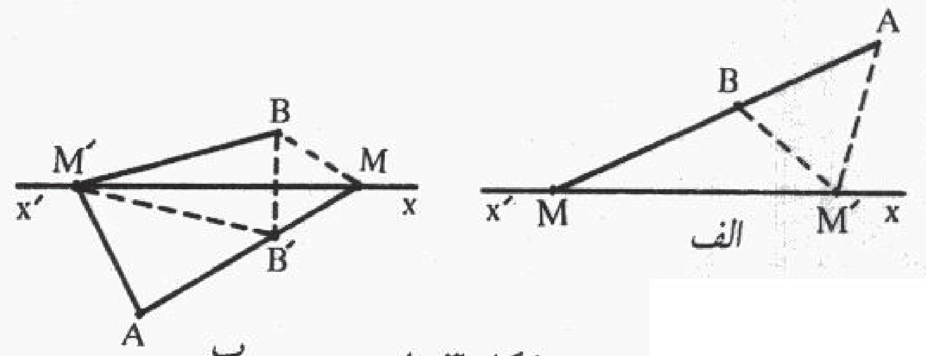
$$\frac{y - ۵}{x + ۵} = \frac{۵ + ۷}{-۵ - ۹} = -\frac{۶}{۷} \Rightarrow ۶x + ۷y - ۵ = ۰$$

نقطهٔ برخورد این خط راست با خط راست $۲x - y - ۵ = ۰$، همان نقطهٔ P است:

$$\begin{cases} ۶x + ۷y - ۵ = ۰ \\ ۲x - y - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow P \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۱ \end{array} \right.$$

۱۴۹. اگر دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط راست d باشند، نقطهٔ M، محل برخورد خط راست AB با خط راست d، نقطه‌ای از خط راست d است که تفاضل فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B، بیشترین مقدار ممکن است. در شکل ۱۰۳ـ الف، به روشنی دیده می‌شود:

$$|MA| - |MB| = |AB| > |M'A| - |M'B|$$



شکل ۱۰۳

ولی اگر A و B در دو طرف خط راست d باشند، نقطهٔ M، محل برخورد خط راست AB' با خط راست d است (B'، قرینهٔ B نسبت به خط راست d است). در شکل ۱۰۳ـب دیده می‌شود:

$$|MA| - |MB| = |MA| - |MB'| = |AB'|;$$
$$|M'B| - |M'A| = |M'B'| - |M'A| < |AB'|$$

در مساله ۱۴۹، نقطه‌های A و B در دو طرف خط راست مفروض قرار دارند؛ بنابراین باید مختصات نقطهٔ B'، قرینهٔ B نسبت به خط راست مفروض را پیدا کرد؛ سپس، با حل دستگاه شامل معادله‌های خط راست AB' و خط راست مفروض، مختصات نقطهٔ مورد نظر M را به دست آورد (عمل‌ها را انجام دهید!).

پاسخ. $M(۲, ۵)$.

۱۵۰. دو خط راست

$$x - ۷y - ۱۷ = ۰ \text{ و } ۷x + y + ۳۱ = ۱$$

بر هم عمودند، زیرا ضریب زاویه‌های آن‌ها، عکس قرینهٔ یکدیگرند. این دو خط راست را، معادله‌های ضلع AB و AC از مثلث ABC می‌گیریم. بنابراین، $\widehat{A} = ۹۰°$.

اکنون، مختصات سه راس مثلث را با حل دو به دوی معادله‌های ضلع‌های آن به دست می‌آوریم:

$$A(-۴, -۳), B(-۵, ۴), C(۳, -۲)$$

که از آن‌جا، برای طول ضلع‌های مثلث ABC، این عددها را خواهیم داشت:

$$|AB| = ۵\sqrt{۲}, |AC| = ۵\sqrt{۲}, |BC| = ۱۰$$

مثلث ABC، متساوی‌الساقین و، در راس A، قائمه است:

$$\widehat{A} = ۹۰^\circ, \widehat{B} = \widehat{C} = ۴۵^\circ$$

۱۵۱ و ۱۵۲. استدلال روشن است.

۱۵۳. چون ضریب زاویهٔ خط راست AB برابر $\frac{۱}{۸}$ است، پس ضریب زاویهٔ ارتفاع CC' (که بر ضلع AB عمود است)، برابر ۸− می‌شود. این ارتفاع، از نقطهٔ $H(۵, ۲)$ می‌گذرد. بنابراین، معادلهٔ آن، به صورت

$$۸x + y - ۴۲ = ۰$$

درمی‌آید. راس C، روی این خط راست است. طول آن را α می‌گیریم؛ بنابراین، عرض نقطهٔ C، برابر $۸\alpha - ۴۲$ می‌شود:

$$C(\alpha, ۴۲ - ۸\alpha)$$

اکنون ضریب زاویهٔ خط راستی را که از A و C می‌گذرد، به دو طریق پیدا می‌کنیم:

۱) این ضریب زاویه، عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط راستی است که از B و H می‌گذرد. ضریب زاویهٔ (BH) برابر ۲ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ

(AC)، برابر $-\frac{۱}{۲}$ است؛ ۲) با توجه به مختصات نقطه‌های A و C، ضریب زاویهٔ خط راست AC، چنین می‌شود:

$$m_{AC} = \frac{۴۰ - ۸\alpha}{\alpha + ۱۰}$$

این دو مقداری که برای ضریب زاویهٔ ضلع AC به دست آوردیم، باید با هم برابر باشند:

$$\frac{۴۰ - ۸\alpha}{\alpha + ۱۰} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶$$

اگر مقدار α را در مختصات نقطهٔ C (که بر حسب α است) قرار دهیم، مختصات نقطهٔ C (راس سوم مثلث) معین می‌شود.

پاسخ. $C(۶, -۶)$.

۱۵۴. *راهنمائی.* معادلهٔ ارتفاع CP را می‌توان به دست آورد، زیرا از نقطهٔ H، محل برخورد دو ارتفاع AM و BN می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای برابر عکس قرینهٔ ضریب زاویه ضلع AB دارد. معادلهٔ ارتفاع CP، چنین می‌شود:

$$۳x + ۵y - ۲۳ = ۰$$

نقطهٔ C، روی این ارتفاع است. اگر طول نقطهٔ C را α فرض کنیم، می‌توان مختصات راس C را این طور نوشت:

$$C\left(\alpha, \frac{۲۳ - ۳\alpha}{۵}\right)$$

ضریب زاویه ضلع AC، عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ ارتفاع BN، یعنی برابر $-\frac{۲}{۷}$ است. معادلهٔ ضلع AC را با در دست داشتن ضریب زاویه و مختصات راس C (بر حسب α) بنویسید. سپس آن را با معادلهٔ ضلع AB، مثل یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حل کنید. به این ترتیب، مختصات راس A

بر حسب α به دست می‌آید که باید در معادله ارتفاع AM صدق کند. از این جا، α و، در نتیجه، مختصات نقطهٔ A و، سپس، معادله‌های دو ضلع AC و BC پیدا می‌شود:

پاسخ. معادلهٔ ارتفاع CP: $۳x + ۵y - ۲۳ = ۰$؛

معادلهٔ ضلع BC: $۳x + ۴y - ۲۲ = ۰$؛

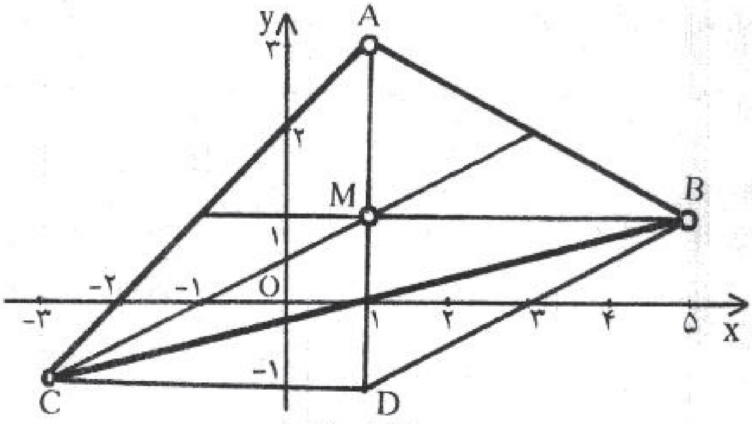
معادلهٔ ضلع AC: $۲x - ۷y - ۵ = ۰$؛

مختصات راس‌های مثلث:

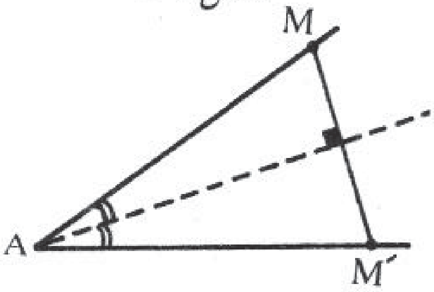
$$A(-۱, -۱), B(۲, ۴), C(۶, ۱)$$

۱۵۵. *راهنمائی.* مساله را می‌توانید با این طرح حل کنید: ۱) نقطهٔ A روی هیچ کدام از دو میانه نیست (مختصات آن، در معادله‌های میانه‌ها صدق نمی‌کند)؛ بنابراین، معادله‌های مفروض، معادله‌های دو میانه‌ای هستند که از راس‌های B و C گذشته‌اند. ۲) مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌ها را پیدا کنید و آن را M بنامید. ۳) روی خط راستی که از A و M می‌گذرد، پاره‌خط راست MD را با طولی برابر طول پاره‌خط راست AM جدا کنید (شکل ۱۰۴). با معلوم بودن مختصات نقطه‌های A و M، مختصات نقطهٔ D را پیدا کنید (M وسط پاره‌خط راست AD است). ۴) توجه کنید که چهارضلعی $BDCM$ متوازی‌الاضلاع است (قطرهای آن، یکدیگر را نصف کرده‌اند)؛ معادلهٔ هر یک از خط‌های راست DB و DC را بنویسید (هر دو خط راست از نقطهٔ D گذشته‌اند، یکی موازی میانه BM و دیگری موازی میانهٔ CM است). ۵) از برخورد خط‌های راست DB و BM مختصات راس B و از برخورد خط‌های راست DC و CM، مختصات راس C را پیدا کنید. ۶) با در دست داشتن مختصات سه راس مثلث، معادلهٔ هر ضلع آن را بنویسید.

پاسخ. $x + ۲y - ۷ = ۰$، $x - ۴y - ۱ = ۰$ و $x - y + ۲ = ۰$.



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۵

۱۵۶. *راهنمائی.* ۱) B روی هیچ کدام از دو ارتفاع نیست. ۲) خط راست AB از نقطهٔ معلوم B می‌گذرد و ضریب زاویه‌اش، برابر عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ ارتفاعی است که از راس C می‌گذرد. ۳) به کمک معادلهٔ ضلع AB و معادلهٔ ارتفاع AH، مختصات راس A پیدا می‌شود. ۴) به همین ترتیب، مختصات راس C به دست می‌آید. ۵) با معلوم بودن مختصات راس‌های مثلث، معادله‌های ضلع‌های آن‌ها به سادگی معلوم می‌شود.

پاسخ. $۳x - ۵y - ۱۳ = ۰$، $۵x + ۲y - ۱ = ۰$، $۸x - ۳y - ۱۷ = ۰$.

۱۵۷. اگر قرینهٔ نقطه‌ای مثل M واقع بر ضلع زاویهٔ A را نسبت به نیمساز این زاویه پیدا کنیم (شکل ۱۰۵)، به نقطه‌ای مثل M'، روی ضلع دیگر زاویه می‌رسیم.

در مسالهٔ ما، راس A روی دو نیمساز مفروض نیست. معادله‌های مفروض، متعلق به نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی B و C از مثلث ABC

هستند. مختصات نقطه‌های قرینهٔ A نسبت به این دو نیمساز، روی ضلع BC قرار می‌گیرند (دقیق‌تر: روی خط راستی که از B و C می‌گذرد). این دو نقطه به سادگی به دست می‌آیند:

$$A_1(-2, -1), A_2(0, 3)$$

خط راستی که از A_1 و A_2 بگذرد، همان معادلهٔ خط راستی است که از ضلع BC می‌گذرد. این معادله چنین است:

$$2x - y + 3 = 0$$

با در نظر گرفتن معادلهٔ ضلع BC و معادله نیمساز زاویهٔ B، مختصات نقطهٔ B و، شبیه آن، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید. با معلوم بودن مختصات سه راس، پیدا کردن معادلهٔ ضلع‌های AB و AC دشوار نیست.

پاسخ. $2x - y + 3 = 0$، $2x + y - 7 = 0$ و $x - 2y - 6 = 0$.

۱۵۸. ضریب زاویهٔ ارتفاع BH برابر ۱ و، بنابراین، ضریب زاویهٔ ضلع AC برابر -1 می‌شود. معادلهٔ ضلع AC، با در دست داشتن ضریب زاویه و نقطهٔ C از آن، به سادگی به دست می‌آید:

$$y - 3 = -(x - 4) \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

اگر با معادله‌های نیمساز AD و ضلع AC، دستگاهی تشکیل دهیم، با حل آن، مختصات راس A به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} 9 \\ -2 \end{array} \right.$$

اگر قرینهٔ راس C را نسبت به نیمساز AD پیدا کنیم، نقطهٔ دیگری از ضلع AB به دست می‌آید. از C عمود CP را بر AD رسم می‌کنیم و امتداد

می‌دهیم تا خط راست AB را در نقطهٔ C' قطع کند: C' قرینهٔ C نسبت به AD است.

ضریب زاویهٔ خط راست AD برابر $-\frac{۱}{۲}$ و، بنابراین ضریب زاویه خط راست CC' (عمود بر AD) برابر ۲ می‌شود. CC' از $C(۴,۳)$ می‌گذرد و معادله‌اش چنین است.

$$y - ۳ = ۲(x - ۴) \Rightarrow ۲x - y - ۵ = ۰$$

از حل معادلهٔ CC' با معادلهٔ AD، مختصات نقطهٔ P (وسط CC') به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x - y - ۵ = ۰ \\ x + ۲y - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow P \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

با توجه به مختصات دو نقطهٔ C و P، مختصات نقطهٔ C' پیدا می‌شود:

$$x_{C'} + x_C = ۲x_p \Rightarrow x_{C'} = ۲$$
$$y_{C'} + y_C = ۲y_p \Rightarrow y_{C'} = -۱$$

با در دست داشتن نقطه‌های $A(۹, -۲)$ و $C'(۲, -۱)$، معادلهٔ خط راست AC' (که همان خط راست AB است) به دست می‌آید:

$$\frac{y + ۱}{x - ۲} = \frac{-۱ + ۲}{۲ - ۹} = -\frac{۱}{۷} \Rightarrow x + ۷y + ۵ = ۰$$

دستگاه شامل معادله‌های ضلع AB و ارتفاع BH، مختصات نقطهٔ B را به ما می‌دهد:

$$\begin{cases} x + ۷y + ۵ = ۰ \\ x - y + ۱۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow B \left| \begin{matrix} -۱۲ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

مختصات دو راس $B(-۱۲,۱)$ و $C(۴,۳)$ در اختیار ماست و، به یاری آن‌ها، معادله ضلع BC چنین می‌شود:

$$\frac{y-۳}{x-۴}=\frac{۳-۱}{۴+۱۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow x-۸y+۲۰=۰$$

۱۵۹. اگر با معادله‌های دو خط راست BH و BM دستگاهی تشکیل دهیم، با حل دستگاه، مختصات راس B به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x-۳y+۱۲=۰ \\ ۲x+۳y=۰ \end{cases} \Rightarrow B\left| \begin{matrix} -۳ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

با در دست داشتن دو نقطهٔ $A(۴,-۱)$ و $B(-۳,۲)$، معادلهٔ ضلع AB را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y-۲}{x+۳}=\frac{۲+۱}{-۳-۴}\Rightarrow ۳x+۷y-۵=۰$$

ضریب زاویهٔ خط راست BH برابر $\frac{۲}{۳}$ و، بنابراین، ضریب زاویه خط راست AC، برابر $-\frac{۳}{۲}$ است. برای ضلع AC، مختصات یکی از نقطه‌ها (A) و ضریب زاویه را می‌دانیم. معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$y+۱=-\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow ۳x+۲y-۱۰=۰$$

از برخورد ضلع AC با میانهٔ BM، می‌توان مختصات نقطهٔ M (وسط ضلع AC) را پیدا کرد:

$$\begin{cases} ۳x+۲y-۱۰=۰ \\ ۲x+۳y=۰ \end{cases} \Rightarrow M\left| \begin{matrix} ۶ \\ -۴ \end{matrix} \right.$$

به یاری مختصات دو نقطهٔ A و M، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید:

$$x_C + x_A = ۲x_M \Rightarrow x_C = ۸,$$
$$y_C + y_A = ۲y_M \Rightarrow y_C = -۷$$

سرانجام، با در دست داشتن نقطه‌های $B(-۳, ۲)$ و $C(۸, -۷)$، معادلهٔ خط راستی که از ضلع BC می‌گذرد، معین می‌شود:

$$\frac{y - ۲}{x + ۳} = \frac{۲ + ۷}{-۳ - ۸} = -\frac{۹}{۱۱} \Rightarrow ۹x + ۱۱y + ۵ = ۰$$

۱۶۰. ضریب زاویهٔ ارتفاع BH برابر ۳− و، بنابراین، ضریب زاویهٔ ضلع AC برابر $\frac{۱}{۳}$ است. خط راست AC از نقطهٔ معلوم $A(۲, -۷)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن، چنین است:

$$y + ۷ = \frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow x - ۳y - ۲۳ = ۰$$

با تشکیل دستگاهی شامل معادله‌های دو خط راست AC و CM، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x - ۳y - ۲۳ = ۰ \\ x + ۲y + ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} ۵ \\ -۶ \end{matrix} \right.$$

اگر طول راس B را بر α بگیریم؛ چون B روی ارتفاع BH قرار دارد، عرض آن، برابر $-۳\alpha - ۱۱$ می‌شود:

$$B(\alpha, -۳\alpha - ۱۱)$$

با توجه به مختصات نقطه‌های A و B، مختصات نقطهٔ M (وسط پاره‌خط راست AB) پیدا می‌شود:

$$M\left(\frac{\alpha + ۲}{۲}, -\frac{۳\alpha + ۱۸}{۲}\right)$$

این مختصات، باید در معادلهٔ میانه CM صدق کند:

$$\frac{\alpha+۲}{۲}-(۳\alpha+۱۸)+۷=۰ \Rightarrow \alpha=-۴$$

بنابراین، برای مختصات نقطهٔ B داریم: $B(-۴,۱)$.

با در اختیار داشتن مختصات سه راس مثلث، معادلهٔ ضلع‌های AB و BC به دست می‌آید.

پاسخ. معادلهٔ ضلع AB: $۴x+۳y+۱۳=۰$؛

معادلهٔ ضلع AC: $x-۳y-۲۳=۰$؛

معادلهٔ ضلع BC: $۷x+۹y+۱۹=۰$.

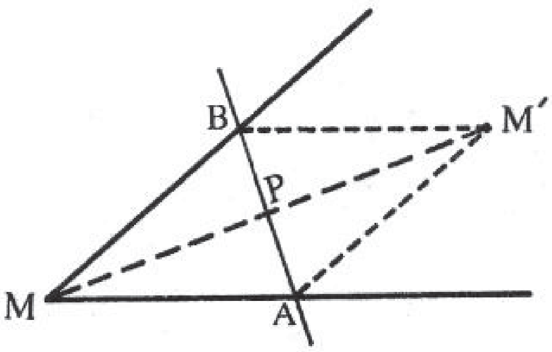
۱۶۱. *راهنمائی.* یک راس مثلث (نقطهٔ A)، نقطهٔ برخورد دو خط راست مفروض است: $A(-۷,۵)$. خط راستی که از مبداء مختصات می‌گذرد با ضریب زاویهٔ m فرض کنید ($mx-y=۰$) و نقطهٔ برخورد آن را، با هر یک از دو خط مفروض به دست آورید (نقطه‌های B و C):

$$B\left(\frac{۱۲}{m-۱},\frac{۱۲m}{m-۱}\right);C\left(-\frac{۹}{m+۲},-\frac{۹m}{m+۲}\right)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A را از خط راست BC با $|AH|$ نشان دهید و آن را (بر حسب m) محاسبه کنید. مقدار مجذور طول پاره‌خط راست BC را (بر حسب m) محاسبه کنید و، سپس، حاصل ضرب $(|BC|\cdot|AH|)^۲$ را برابر ۹ قرار دهید (حاصل ضرب طول قاعده در ارتفاع برابر دو برابر مساحت مثلث است). اگر جواب‌های زیادی را کنار بگذارید، دو مقدار برای m به دست می‌آید: $-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۲۳}{۲۵}$.

پاسخ. $x+۲y=۰$، $۲۳x+۲۵y=۰$.

۱۶۲. اگر بخواهیم مساله را، بدون یاری از هندسه حل کنیم، باید معادلهٔ خط راستی را که P با ضریب زاویهٔ m می‌گذرد بنویسیم، سپس



شکل ۱۰۶

نقطه‌های برخورد آن را با دو خط مفروض پیدا کنیم (کافی است تنها طول، یا تنها عرض دو نقطهٔ برخورد را به دست آوریم) و، سرانجام، شرطی را بنویسیم که P وسط دو نقطهٔ برخورد باشد. این راه حل، دشوار نیست، ولی با محاسبه‌ای کم و بیش طولانی سروکار پیدا می‌کنید.

به شکل ۱۰۶ توجه کنید. اگر از M (نقطهٔ برخورد دو خط راست مفروض) به P وصل کنیم و پاره‌خط راست MP را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا به M' برسد؛ سپس از M'، دو خط راست موازی خط‌های راست مفروض رسم کنیم تا آن‌ها را در A و B قطع کنند. خط راست AB، همان خط راست مورد نظر است (زیرا چهار ضلعی $MBM'A$ متوازی‌الاضلاع است و قطرهای آن، از نقطهٔ وسط یکدیگر می‌گذرند).

با معادله‌های دو خط راست مفروض، دستگاهی تشکیل می‌دهیم و، با حل دستگاه، مختصات نقطهٔ M (نقطهٔ برخورد آن‌ها) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲x - y - ۲ = ۰ \\ x + y + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{۱}{۳}, -\frac{۸}{۳}\right)$$

مختصات نقطهٔ M' را طوری پیدا می‌کنیم که، نقطهٔ P، وسط پاره‌خط راست MM' باشد:

$$x_M + x_{M'} = ۲x_P \Rightarrow x_{M'} = \frac{۱۹}{۳},$$

$$y_M + y_{M'} = ۲y_P \Rightarrow y_{M'} = \frac{۸}{۳},$$

از نقطهٔ $M'\left(\frac{۱۹}{۳}, \frac{۸}{۳}\right)$، خط راستی موازی با یکی از دو خط راست مفروض، و مثلاً $۲x - y - ۲ = ۰$ رسم می‌کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$۲x - y - ۱۰ = ۰$$

و نقطهٔ برخورد آن را با خط راست $x + y + ۳ = ۰$ (خط راست دوم) پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x - y - ۱۰ = ۰ \\ x + y + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{۷}{۳}, -\frac{۱۶}{۳}\right)$$

خط راستی که از B و P بگذرد، خط راست مطلوب است:

$$۸x - y - ۲۴ = ۰$$

۱۶۳. *راهنمائی.* دو خط راست مفروض با هم موازی‌اند و نقطهٔ P، درست در وسط آن‌ها قرار دارد (با محاسبه ثابت کنید.) بنابراین، هر خط راستی که از P بگذرد، در برخورد با دو خط راست، پاره‌خط راستی پدید می‌آورد که، در نقطهٔ P، نصف می‌شود.

۱۶۴. معادلهٔ خط راستی که از مبداء مختصات می‌گذرد، $y = mx$ می‌گیریم و مختصات نقطه‌های برخورد آن را با دو خط مفروض، پیدا می‌کنیم. اگر این دو نقطه را A و B بنامیم، به دست می‌آید:

$$A\left(\frac{۵}{m - ۲}, \frac{۵m}{m - ۲}\right) \text{ و } B\left(\frac{۱۰}{m - ۲}, \frac{۱۰m}{m - ۲}\right)$$

که از آن‌جا، برای مجذور طول پاره‌خط راست AB به دست می‌آید:

$$|AB|^۲ = \frac{۲۵(m^۲ + ۱)}{(m - ۲)^۲}$$

که بنا بر فرض مساله، باید برابر ۱۰ باشد:

$$\frac{۲۵(m^۲ + ۱)}{(m - ۲)^۲} = ۱۰ \Rightarrow m = -۳, \frac{۱}{۳}$$

پاسخ. $۳x + y = ۰$ و $x - ۳y = ۰$.

۱۶۵. در آغاز، مختصات نقطهٔ C را پیدا می‌کنیم. اگر وسط دو نقطهٔ C و B را C' بنامیم، درضمن، C وسط A و C' قرار می‌گیرد و باید داشته باشیم

$$x_A + x_{C'} = ۲x_C \Rightarrow x_{C'} = ۲x_C + ۴$$

و چون C' وسط C و B است:

$$x_C + x_B = ۲x_{C'} \Rightarrow x_C + ۱ = ۲(۲x_C + ۴)$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید: $x_C = -\frac{۷}{۳}$. به همین ترتیب، عرض نقطهٔ C هم، محاسبه می‌شود: $y_C = -\frac{۴}{۳}$.

باید معادلهٔ خط راستی را نوشت که از $C\left(-\frac{۷}{۳}, -\frac{۴}{۳}\right)$ بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر ۱− داشته باشد (ضریب زاویهٔ خط راست AB برابر واحد است).

$$۳x + ۳y - ۱۱ = ۰$$

۱۶۶. ضلع AD و قطر AC، یکدیگر را در راس A قطع می‌کنند:

$$\begin{cases} x - y + ۲ = ۰ \\ x + ۲y - ۱۰ = ۰ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \right.$$

همچنین، قطر AC و ضلع BC، در راس C به هم می‌رسند:

$$\begin{cases} x - y + ۲ = ۰ \\ x + ۲y - ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۲ \end{matrix} \right.$$

قطر BD، بر قطر AC عمود است و از وسط پاره‌خط راست AC می‌گذرد. در نتیجه، معادلهٔ آن به سادگی به دست می‌آید: $x+y-۴=۰$. این قطر ضلع BC را در B و ضلع AD را در D قطع می‌کند:

$$B(۴,۰) \text{ و } D(-۲,۶)$$

۱۶۷. خط راست CD، با ضریب زاویهٔ $۱ = \mathrm{tg}۴۵^\circ$، از نقطهٔ $C(۵,۶)$ می‌گذرد؛ پس، معادلهٔ خط راست CD چنین است:

$$y-۶=۱(x-۵) \Rightarrow x-y+۱=۰$$

ضلع AD بر ضلع CD عمود است و از نقطهٔ A می‌گذرد، پس معادلهٔ AD چنین است:

$$y-۴=-(x-۱) \Rightarrow x+y-۵=۰$$

به یاری معادله‌های دو خط راست CD و AD، مختصات راس D به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x-y+۱=۰ \\ x+y-۵=۰ \end{cases} \quad D\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix}\right.$$

از ضرب طول‌های دو ضلع CD و AD، مساحت مستطیل به دست می‌آید.

پاسخ. $S=۶$ (واحد مربع).

۱۶۸. مربع را $OABC$ می‌گیریم (راس‌ها را، با آغاز از O، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته‌ایم). چون طول ضلع مربع، برابر است با $۴\sqrt{۲}$، پس طول قطر OB برابر ۸ می‌شود (چرا؟) و برای راس B، خواهیم داشت $B(۸,۰)$.

به سادگی روشن می‌شود که ضلع OA روی نیمساز ربع اول و ضلع OC روی نیمساز ربع دوم قرار دارد و، بنابراین، معادله‌های این دو ضلع به

صورت

$$(OA); x - y = ۰; (OC) : x + y = ۰$$

درمی‌آیند. خط راستی که از ضلع AB می‌گذرد با ضلع OC موازی است و، در ضمن، از B می‌گذرد. به همین ترتیب، (BC) با (OA) موازی است و از B می‌گذرد؛ در نتیجه، معادله‌های آنها چنین است:

$$(AB) : x + y - ۸ = ۰; (BC) : x - y - ۸ = ۰$$

قطر AC، از نقطهٔ $M(۴, ۰)$ وسط قطر OB می‌گذرد و با محور $y'y$ موازی است، یعنی معادلهٔ آن، به صورت $x = ۴$ درمی‌آید.

۱۶۹. ۱) مختصات راس B، با حل دستگاهی به دست می‌آید که معادله‌های آن، معادله‌های خط‌های راست BM و BD هستند:

$$\begin{cases} ۴x + ۱۳y - ۱۰ = ۰ \\ x + ۲y - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow B \left| \begin{matrix} ۹ \\ -۲ \end{matrix} \right.$$

با در دست داشتن مختصات نقطه‌های B و C، معادلهٔ ضلع BC پیدا می‌شود:

$$\frac{y - ۳}{x - ۴} = \frac{۳ + ۲}{۴ - ۹} = -۱ \Rightarrow x + y - ۷ = ۰$$

نقطهٔ C'، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به نیمساز BD روی خط راست BA قرار دارد. ضریب زاویهٔ خط راست CC' (که عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط راست BD است) برابر ۲ است. معادلهٔ خط راست CC' (که از نقطهٔ C می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای برابر ۲ دارد)، چنین است:

$$y - ۳ = ۲(x - ۴) \Rightarrow ۲x - y - ۵ = ۰$$

دستگاه شامل معادله‌های خطهای راست CC' و BD، مختصات نقطهٔ K (وسط پاره‌خط راست CC') را به ما می‌دهد:

$$\begin{cases} ۲x - y - ۵ = ۰ \\ x + ۲y - ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow K \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

K، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست CC' است. بنابراین

$$x_C + x_{C'} = ۲x_K \Rightarrow x_{C'} = ۲,$$
$$y_C + y_{C'} = ۲y_K \Rightarrow y_{C'} = -۱$$

دو نقطهٔ $B(۹, -۲)$ و $C'(۲, -۱)$ از خط راست AB معلوم‌اند. بنابراین می‌توان معادلهٔ خط راست AB را به دست آورد:

$$\frac{y + ۱}{x - ۲} = \frac{-۲ + ۱}{۹ - ۲} = -\frac{۱}{۷} \Rightarrow x + ۷y + ۵ = ۰$$

نقطهٔ A روی ضلع AB قرار دارد. اگر طول آن را α فرض کنیم، عرض آن، برابر $-\frac{\alpha + ۵}{۷}$ می‌شود و، بنابراین، مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست AC، بر حسب α، به دست می‌آید:

$$M\left(\frac{\alpha + ۴}{۲}, \frac{۱۶ - \alpha}{۱۴}\right)$$

مختصات نقطهٔ M، باید در معادلهٔ خط راست BM صدق کند. از آن‌جا، مقدار α، به دست می‌آید: $\alpha = -۱۲$؛ و مختصات راس A از مثلث ABC، چنین می‌شود: $A(-۱۲, ۱)$.

مختصات راس‌های A و C معلوم‌اند، معادلهٔ ضلع AC را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y - ۳}{x - ۴} = \frac{۳ - ۱}{۴ + ۱۲} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x - ۸y + ۲۰ = ۰$$

۲) راس B روی نیمساز BD قرار دارد. $x = \alpha$ را طول نقطهٔ B می‌گیریم. در این صورت، با توجه به معادلهٔ خط راست BD، عرض این نقطه، برابر $\frac{\alpha + ۱۰}{۴}$ می‌شود و برای مختصات نقطهٔ M (وسط ضلع BC) خواهیم داشت:

$$M\left(\frac{\alpha + ۳}{۲}, \frac{\alpha + ۶}{۸}\right)$$

مختصات نقطهٔ M، باید در معادلهٔ خط راست AM صدق کند:

$$(AM) : ۶x + ۱۰y - ۵ = ۰$$

$$۶\left(\frac{\alpha + ۳}{۲}\right) + ۱۰\left(\frac{\alpha + ۶}{۸}\right) - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱۰$$

بنابراین، $B(۱۰, ۵)$ یکی از راس‌های مثلث است و با مفروض بودن راس $C(۳, -۱)$، معادلهٔ ضلع BC به دست می‌آید:

$$(BC) : ۶x - ۷y - ۲۵ = ۰$$

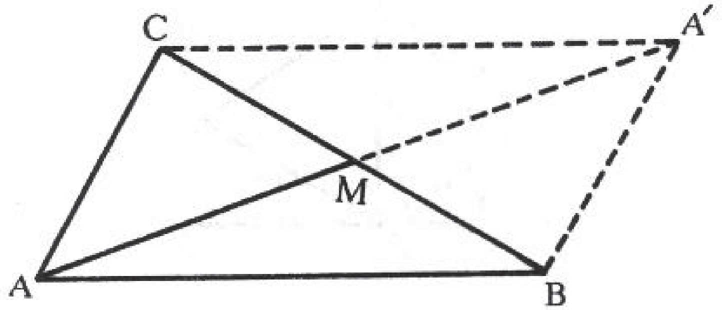
C' قرینهٔ راس C، نسبت به نیمساز BD، روی خط راست AB می‌افتد و، برای آن، به دست می‌آید: $C'(۱, ۷)$ (محاسبه کنید!).

خط راست BC'، همان خط راست BA است و، برای معادلهٔ آن (با در دست داشتن مختصات نقطه‌های B و C') خواهیم داشت:

$$(AB) : ۲x + ۹y - ۶۵ = ۰$$

به شکل ۱۰۷ توجه کنید. اگر میانهٔ AM را، به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' ادامه دهیم، چهار ضلعی $ABA'C$، متوازی‌الاضلاع می‌شود (قطرهای آن، یکدیگر را نصف کرده‌اند). خط راست CA'، از C می‌گذرد و با خط راست AB موازی است و معادلهٔ آن به سادگی به دست می‌آید:

$$(CA') : ۲x + ۹y + ۳ = ۰$$



شکل ۱۰۷

از دستگاه شامل معادله‌های دو خط راست CA' و AA' (همان AM)، مختصات نقطهٔ A' محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x + ۹y + ۳ = ۰ \\ ۶x + ۱۰y - ۵۹ = ۰ \end{cases} \Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \frac{۱۳}{۲} \\ -۴ \end{array} \right.$$

نقطهٔ M وسط دو نقطهٔ A و A' است. با در دست داشتن مختصات نقطه‌های A' و M، مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید:

$$A\left(-\frac{۷}{۲}, ۸\right)$$

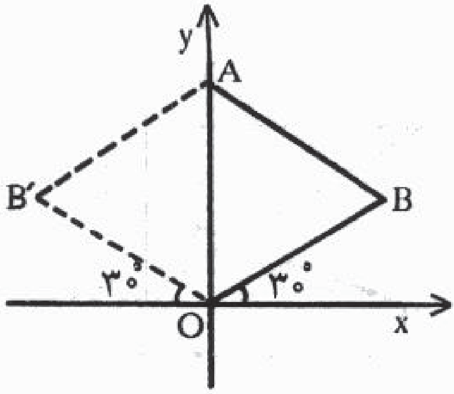
به یاری مختصات راس‌های A و C، معادلهٔ ضلع AC پیدا می‌شود:

$$(AC) : ۱۸x + ۱۳y - ۴۱ = ۰$$

۱۷۰. مساله دو جواب دارد: مثلث OAB و مثلث OAB' (شکل ۱۰۸). معادلهٔ ضلع OA (معادلهٔ محور $y'y$) عبارت است از $x = ۰$.

خط راست OB با جهت مثبت محور $x'x$ زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه می‌سازد، بنابراین، ضریب زاویهٔ آن، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است:

$$(OB) : x - \sqrt{۳}y = ۰$$



شکل ۱۰۸

ضلع AB از $A(۰, ۸)$ می‌گذرد و با جهت مثبت محور طول، زاویه‌ای برابر ۱۵۰ درجه می‌سازد:

$$(AB): x + \sqrt{۳}y - ۸\sqrt{۳} = ۰$$

به همین ترتیب، برای ضلع‌های مثلث OAB':

$$(OB'): x + \sqrt{۳}y = ۰$$
$$(AB'): x - \sqrt{۳}y + ۸\sqrt{۳} = ۰$$

۱۷۱. پاسخ. $x + y + ۳ = ۰$ یا $x + y - ۳ = ۰$.

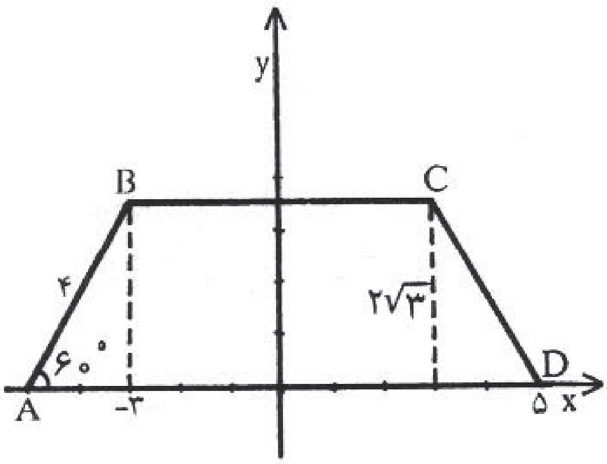
۱۷۲. راهنمائی. متوازی‌الاضلاع را $OABC$ می‌نامیم. B قرینهٔ O نسبت به M و C قرینهٔ A نسبت به M است.

پاسخ. $(OA)y = ۰$؛ $(AB)۴x - ۳y + ۱۲ = ۰$؛ $(BC)y = ۴$؛ $(CO)۴x - ۳y = ۰$.

۱۷۳. پاسخ. ۲۵ واحد مربع.

۱۷۴. راهنمائی. از ضلع‌های جانبی، یکی زاویهٔ ۶۰ درجه و دیگری زاویهٔ ۱۲۰ درجه، با جهت مثبت محور $x'x$ می‌سازد.

پاسخ. $x - \frac{۱}{\sqrt{۳}}y + ۶ = ۰$ و $x + \frac{۱}{\sqrt{۳}}y - ۶ = ۰$.



شکل ۱۰۹

۱۷۵. همه چیز در شکل ۱۰۹ به روشنی دیده می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}-۵\\ ۰\end{matrix}\right.,\ B\left|\begin{matrix}-۲\sqrt{۳}\\ -۳\end{matrix}\right.,\ C\left|\begin{matrix}۲\sqrt{۳}\\ ۳\end{matrix}\right.,\ D\left|\begin{matrix}۵\\ ۰\end{matrix}\right.$$

پاسخ. $(AD)\ y=۰$، $(BC)\ y=۲\sqrt{۲}$،
$(AB)x-\frac{۱}{\sqrt{۳}}y+۵=۰$، $(CD)\ x-\frac{۴}{\sqrt{۳}}y-۵=۰$.

۱۷۶. *راهنمائی.* C، راس زاویهٔ قائمه است (مختصات آن، در معادلهٔ وتر صدق نمی‌کند). نقطهٔ $C'\left(\frac{۱۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$، تصویر راس C بر وتر، در وسط ضلع AB قرار دارد. طول راس A را α بگیرید (عرض آن $\frac{۳\alpha-۲۰}{۷}$ می‌شود)، قرینهٔ A نسبت به C' را پیدا کنید، مختصات راس B بر حسب α به دست می‌آید. ضریب زاویه‌های دو خط راست AC و BC را بر حسب α به دست آورید. این دو ضریب زاویه باید عکس قرینهٔ یکدیگر باشند، زیرا (AC) بر (BC) عمود است. از این‌جا برای مقدار α، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\alpha^{۲}-۱۱\alpha+۱۸=۰.$$

پاسخ. $۵x-۲y-۴۳=۰$ و $۲x+۵y+۶=۰$.

۱۷۷. *راهنمائی.* لوزی را $ABCD$، قطر مفروض را AC و ضلع مفروض را AB بگیرید، $A(۹,۵)$ به دست می‌آید. M وسط دو نقطهٔ A و C است. از این‌جا، نقطهٔ $C(۱,-۳)$ پیدا می‌شود. معادله قطر BD (که عمود بر قطر AC است)، به صورت $x+y=۶$ درمی‌آید که از حل آن با معادلهٔ ضلع AB، نقطهٔ $B(۰,۶)$ و، سپس، قرینهٔ آن نسبت به M، یعنی $D(۱۰,-۴)$ مشخص می‌شود.

۱۷۸. *راهنمائی.* ضلع BC بر خط راست AH و ضلع AC بر خط راست BH عمود است. بنابراین، معادلهٔ ضلع‌های BC و AC و، سپس، مختصات نقطهٔ C به دست می‌آید.

پاسخ. $C(-۳,-۳)$.

۱۷۹. $y=۱$ خط راستی موازی $x'x$ است. بنابراین اگر پرتو نور ضمن تابش، با این خط راست، زاویه‌ای برابر α بسازد، ضریب زاویهٔ مسیر آن برابر $\text{tg}\alpha$ و ضریب زاویهٔ مسیر بازتاب برابر $-\text{tg}\alpha$ خواهد بود (مسیر بازتاب با جهت مثبت محور $x'x$، زاویه‌ای برابر $\pi-\alpha$ می‌سازد).

فرض می‌کنیم، مسیر تابش نور، خط راست $y=۱$ را در نقطهٔ P قطع کند، اگر ضریب زاویهٔ خط راست AP برابر m باشد، ضریب زاویهٔ خط راست PB برابر $-m$ می‌شود. معادلهٔ خط راست AP.

$$y-۴=m(x-۳)\Rightarrow y=mx-۳m+۴$$

و نقطهٔ برخورد آن با خط راست $y=۱$

$$P\left(\frac{۳m-۳}{m},۱\right)$$

می‌شود. معادلهٔ خط راستی را می‌نویسیم که از P بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر $-m$ داشته باشد:

$$y-۱=-m\left(x-\frac{۳m-۳}{m}\right)\Rightarrow y=-mx+۳m-۲$$

این خط راست باید از نقطهٔ $B(-۹,۴)$ بگذرد. از آن‌جا مقدار m به دست می‌آید: $m = \frac{۱}{۲}$.

پاسخ. $x + ۲y + ۱ = ۰$ ،$x - ۲y + ۵ = ۰$.

۱۸۰. معادلهٔ خط راستی که با ضریب زاویهٔ برابر m از نقطهٔ $P(۲,۷)$ بگذرد، چنین است:

$$mx - y - ۲m + ۷ = ۰$$

برای این که فاصلهٔ نقطهٔ $Q(۱,۲)$ از این خط راست برابر ۵ باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{|mx - y - ۲m + ۷|}{\sqrt{m^۲ + ۱}} = ۵ \ (y = ۲, x = ۱ \text{ به‌ازای })$$

$$\frac{|m - ۲ - ۲m + ۷|}{\sqrt{m^۲ + ۱}} = ۵ \Rightarrow \frac{(-m + ۵)^۲}{m^۲ + ۱} = ۲۵$$

از این‌جا به دست می‌آید: $m = ۰$ ،$m = -\frac{۵}{۱۲}$.

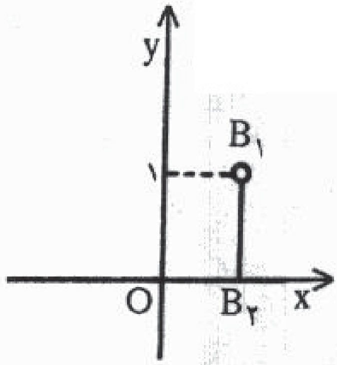
پاسخ. $y + ۷ = ۰$ و $۵x + ۱۲y - ۹۴ = ۰$.

۱۸۱. ۱) خط راست $y = ۲$؛ ۲) صورت و مخرج کسر $\frac{\alpha^۲}{\alpha^۲ + ۱}$ غیر منفی و مقدار صورت از مقدار مخرج، همیشه کوچکتر است، یعنی

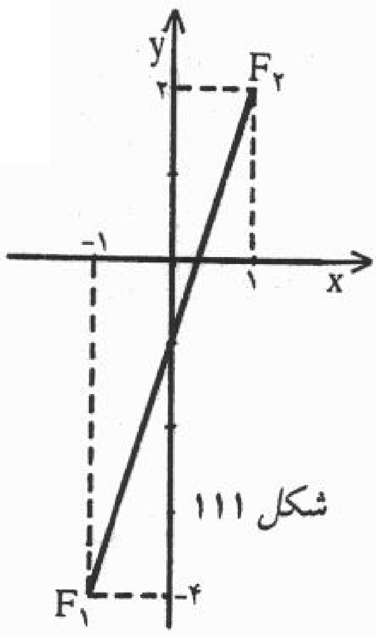
$$\frac{\alpha^۲}{\alpha^۲ + ۱} < ۱$$

طول نقطهٔ B برابر واحد و عرض آن، عددی کوچکتر از واحد است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ B، پاره‌خط راستی است موازی محور $y'y$ که از نقطهٔ $B_۱(۱,۱)$ آغاز می‌شود و تا نقطهٔ $B_۲(۱,۰)$ ادامه دارد. در واقع

$$۰ \leq \frac{\alpha^۲}{\alpha^۲ + ۱} < ۱ \Rightarrow ۰ \leq y_B < ۱$$



شکل ۱۱۰



شکل ۱۱۱

نقطهٔ B_1 متعلق به مکان نیست، ولی نقطهٔ B_2 متعلق به مکان است (شکل ۱۱۰)؛ ۳) خط راست $2x - y = 0$؛ ۴) داریم:

$$x = m + 4, y = 3m$$

m را بر حسب x محاسبه و در y قرار می‌دهیم

$$y = 3(x - 4) \Rightarrow 3x - y - 12 = 0;$$

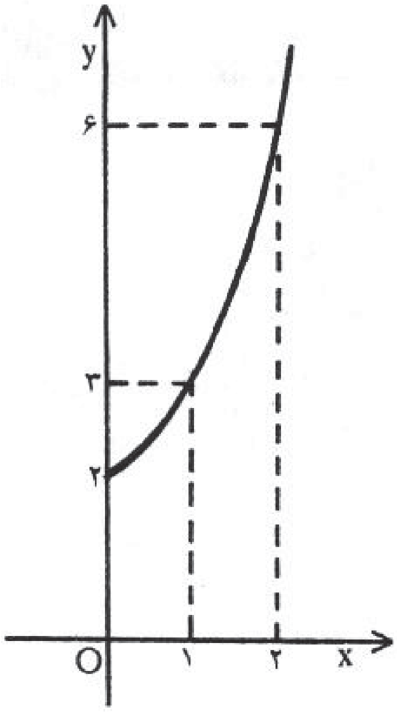
۵) $x = \sin\alpha$ و $y = 3\sin\alpha - 1$، پس $y = 3x - 1$ یا $3x - y - 1 = 0$. ولی $\sin\alpha$ از -1 کمتر و از $+1$ بیشتر نیست، بنابراین

$$-1 \le x \le 1 \text{ و } -4 \le y \le 2$$

نمودار مکان هندسی نقطهٔ F، عبارت است از پاره‌خط راست F_1F_2 که روی خط راست $3x - y - 1 = 0$ قرار دارد و در آن $F_1(-1, -4)$ و $F_2(1, 2)$ (شکل ۱۱۱)؛ ۶) $y = x^2 - 3x + 2$.

۱۸۲. با فرض $M(x, y)$ داریم:

$$|MA|^2 = (x - 5)^2 + y^2; |MB|^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2;$$



شکل ۱۱۲

$$|MA|^۲ - |MB|^۲ = -۸x + ۸y + ۸$$

و بنابراین، معادله مکان هندسی نقطهٔ M به صورت

$$x - y + ۱ = ۰$$

درمی‌آید که خط راستی عمود بر خط راست AB است (چرا؟).

۱۸۳. روشن است که برای نقطهٔ M، همیشه $x \geq ۰$. داریم:

$$x = \sqrt{a - ۲} \Rightarrow a = x^۲ + ۲$$

و در نتیجه، معادلهٔ مکان چنین است:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۲ \\ x \geq ۰ \end{cases}$$

نمودار مکان، در شکل ۱۱۲ داده شده است.

۱۸۴. برخورد دو خط راست $۲x + y = ۳$ و $y = x + a$، نقطهٔ A را به ما می‌دهد:

$$A\left(\frac{۳ - a}{۳}, \frac{۲a + ۳}{۳}\right)$$

و برخورد خط‌های راست $x + ۲y = ۰$ و $y = x + a$، نقطهٔ B را:

$$B\left(-\frac{۲a}{۳}, \frac{a}{۳}\right)$$

و بنابراین، مختصات نقطهٔ P وسط پاره‌خط راست AB چنین است:

$$P\left(x = \frac{۱ - a}{۲}, y = \frac{۱ + a}{۲}\right)$$

با حذف a بین مختصات نقطهٔ P، معادلهٔ مکان آن به دست می‌آید:

$$x + y - ۱ = ۰$$

۱۸۵. معادله‌های خط‌های راست MA و MB چنین‌اند:

$$ax - (a + ۲)y + ۲a = ۰, (MA);$$
$$(a - ۲)x - ay + ۲a = ۰, (MB);$$

از این‌جا، مختصات نقطه‌های C و D به دست می‌آیند:

$$C\left(۰, \frac{۲a}{a + ۲}\right), D\left(-\frac{۲a}{a - ۲}, ۰\right)$$

و معادلهٔ خط راست CD:

$$(a - ۲)^۲x - (a^۲ - ۴)y + ۲a(a - ۲) = ۰$$

و یا

$$(a - ۲)x - (a + ۲)y + ۲a = ۰, a \neq ۲$$

که اگر آن را نسبت به پارامتر a منظم کنیم:

$$(x - y + ۲)a - ۲(x + y) = ۰$$

نقطهٔ ثابت این خط راست، با حل دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x - y + ۲ = ۰ \\ x + y = ۰ \end{cases} \Rightarrow K \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

خط راست CD، از نقطهٔ ثابت $K(-۱, ۱)$ می‌گذرد.

۱۸۶. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ تا خط راست $y + ۱ = ۰$ را $|MH|$ بنامیم، باید داشته باشیم:

$$|MH|^۲ = |MF|^۲ \Rightarrow (y + ۱)^۲ = x^۲ + (y - ۱)^۲$$

از آن‌جا، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M، به دست می‌آید: $y = \frac{۱}{۴}x^۲$.

۱۸۷. ضلع AB بر محور $x'x$ قرار دارد. خط راست $y = m$ (موازی ضلع AB) را در نظر بگیرید؛ نقطه‌های برخورد آن را، به ترتیب، با (AC) و (BC)، با P و Q و تصویرهای P و Q روی AB را با N و M نشان دهید:

$$P \left| \begin{matrix} \frac{۱۰ - ۳m}{۲} \\ m \end{matrix} \right. , Q \left| \begin{matrix} \frac{m - ۶}{۲} \\ m \end{matrix} \right. , M \left| \begin{matrix} \frac{m - ۶}{۲} \\ ۰ \end{matrix} \right. , N \left| \begin{matrix} \frac{۱۰ - ۳m}{۲} \\ ۰ \end{matrix} \right.$$

نقطهٔ K، مرکز مستطیل $PQBA$، در وسط قطر PM (یا وسط قطر QN) است:

$$K\left(x = \frac{-m + ۲}{۲}, y = \frac{m}{۲}\right)$$

با حذف m بین مختصات نقطهٔ K، روشن می‌شود که، مکان مرکز مستطیل، روی خط راست زیر است:

$$x + y - ۱ = ۰$$

ولی روشن است که تمامی این خط راست، جزو مکان نیست. مرز پایین خط راست PQ، وقتی است که روی ضلع AB قرار گیرد. در این حالت،

مستطیل به پاره‌خط راست AB تبدیل می‌شود که، مرکز آن نقطهٔ $F(۱, ۰)$ (وسط پاره‌خط راست AB) است. مرز بالای پاره‌خط راست PQ، وقتی است که از نقطهٔ C بگذرد که دوباره، مستطیل به پاره‌خط راستی منطبق بر ارتفاع CC' (از مثلث ABC) تبدیل می‌شود و مرکز آن، نقطهٔ $E(-۱, ۲)$ وسط CC' است.

به این ترتیب، مکان مطلوب، عبارت است از پاره‌خط راست EF که، در آن، $E(-۱, ۲)$ و $F(۱, ۰)$.

۱۸۸. باید در دستگاه شامل معادله‌های

$$x = m^۲ + m + ۱ \text{ و } y = m^۲ - m + ۱$$

پارامتر m را حذف کرد. برای این منظور $x - y$ را محاسبه می‌کنیم و، از برابری حاصل، m را بر حسب x و y به دست می‌آوریم و، سپس، در یکی از دو معادلهٔ بالا قرار می‌دهیم.

پاسخ. معادله مکان هندسی نقطهٔ A، چنین است:

$$x^۲ + y^۲ - ۲xy - ۲x - ۲y + ۴ = ۰$$

۱۸۹. *پاسخ.* خطی راست موازی خط راست مفروض و به معادلهٔ

$$\frac{x}{۶} + \frac{y}{۹} = ۱$$

۱۹۰. این، یک مسالهٔ خالص هندسی است و، در این‌جا، می‌خواهیم راه حل آن را، به یاری «هندسهٔ تحلیلی» پیدا کنیم. به یاری «هندسهٔ تحلیلی» و با وارد کردن دستگاه محورهای مختصات، می‌توان مساله‌های هندسی را، با روش‌های جبری و به یاری محاسبه حل کرد. مساله‌هایی در هندسه وجود دارند (مثل همین مسالهٔ ۱۹۰)، که راه حل جبری و محاسبه‌ای آن‌ها، بسیار

ساده‌تر است. در ضمن، در راه حل جبری، اگر با دقت جلو برویم، کمتر گرفتار اشتباه‌های ناشی از شکل می‌شویم و به همهٔ حالت‌های ممکن، دست می‌یابیم. البته نباید فراموش کرد که، راه حل جبری مساله‌های هندسی، گاه منجر به محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور می‌شود؛ در ضمن، زیبایی راه حل هندسی را (که ناشی از منطق، استدلال و اندیشهٔ ذهنی است) ندارد. در راه حل جبری، کورکورانه پیش می‌رویم و منتظر نتیجهٔ محاسبه‌ها می‌مانیم، در حالی که در راه حل هندسی، ناچاریم، در هر لحظه و هر گام، از اندیشهٔ خود بهره بگیریم، آگاهی‌های خود را به یاد آوریم، مساله را با مساله‌هایی که پیش از آن حل کرده‌ایم، مقایسه کنیم و ... تا بتوانیم به نتیجهٔ مطلوب برسیم. به همین مناسبت است که، به دانش‌آموزان علاقه‌مند، سفارش می‌کنم، دربارهٔ هر مساله، به راه حل‌های مختلف بیندیشند و، خود را، به نخستین راه حلی که پیدا کرده‌اند، قانع نکنند. هر راه حلی، سودمندی‌های خود را دارد و دورنمای تازه‌ای در برابر دیدگان ما می‌گشاید.

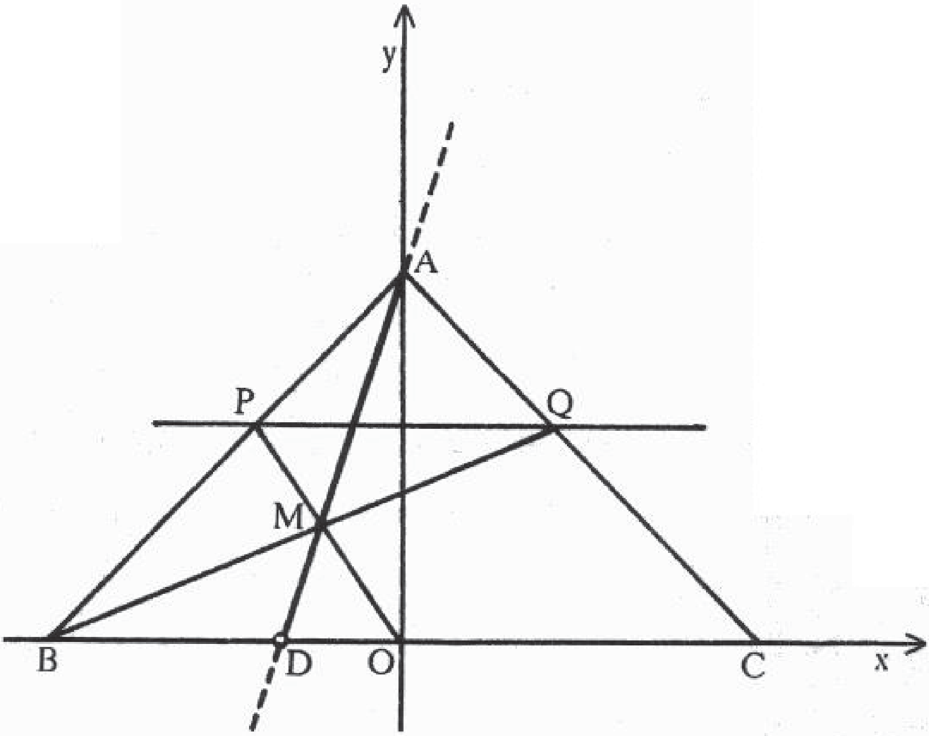
به حل مساله برگردیم. در این‌جا، باید چند مرحله را در نظر بگیریم:

۱) انتخاب دستگاه محورهای مختصات. دستگاه محورهای مختصات را، باید به گونه‌ای انتخاب کرد که کار محاسبه را، به ساده‌ترین صورت خود درآورد. در انتخاب دستگاه محورهای مختصات، باید جای مبداء و محورها مشخص و واحد اندازه‌گیری در نظر گرفته شود؛

۲) اگر در مساله، متغیری وجود دارد (مثل مسالهٔ ما)، پارامتری انتخاب شود تا بتوان، نقطه یا خط راست متغیر را، به یاری آن نشان داد؛

۳) بعد از این دو مرحله، باید مختصات نقطه‌ها و معادله‌های خط‌های راستی را که به مساله مربوط‌اند، با دنبال کردن صورت مساله، پیدا کرد و خود را به نتیجهٔ مورد نظر رسانید.

محور $x'x$ را روی ضلع BC، در جهت از B به C، مبداء مختصات را در نقطهٔ O، وسط پاره‌خط راست BC و واحد اندازه‌گیری را، به اندازهٔ



شکل ۱۱۳

طول پاره‌خط راست OA (که با طول پاره‌خط‌های راست OB و OC برابر است)، انتخاب می‌کنیم. در این صورت داریم (شکل ۱۱۳):

$$A(\circ, 1), B(-1, \circ), C(1, \circ)$$

خط راست PQ، موازی (BC) (محور $x'x$)، متغیر است. معادلهٔ آن را $y = m$ می‌گیریم.

برای رسیدن به مختصات نقطهٔ M (که مکان هندسی آن را می‌خواهیم)، باید معادلهٔ دو خط راست BQ و OP را در اختیار داشته باشیم و، در نتیجه، باید مختصات نقطه‌های P و Q را (البته بر حسب m) به دست آوریم.

در آغاز، معادله‌های دو خط راست AB و AC را پیدا می‌کنیم:

$$(AB) : x - y + 1 = \circ; (AC) : x + y - 1 = \circ$$

عرض نقطه‌های P و Q، برابر m است، با قرار دادن m در معادله‌های (AB) و (AC)، طول هر یک از این نقطه‌ها پیدا می‌شود:

$$P(m - 1, m);\ Q(1 - m, m)$$

اکنون می‌توان معادلهٔ هر یک از خط‌های راست BQ و OP را نوشت:

$$(BQ): mx+(m-۲)y+m=\circ;\ (OP): mx-(m-۱)y=\circ$$

از دستگاه شامل معادله‌های (BQ) و (OP)، مختصات نقطهٔ M به دست می‌آید:

$$M\left(x=-\frac{m-۱}{۲m-۳}, y=-\frac{m}{۲m-۳}\right)$$

با حذف پارامتر m، بین x و y نقطهٔ M، معادله مکان هندسی نقطهٔ M پیدا می‌شود:

$$x=-\frac{m-۱}{۲m-۳}\Rightarrow m=\frac{۳x+۱}{۲x+۱},$$
$$y=-\frac{m}{۲m-۳}\Rightarrow m=\frac{۳y}{۲y+۱},$$
$$\frac{۳x+۱}{۲x+۱}=\frac{۳y}{۲y+۱}\Rightarrow y=۳x+۱$$

یعنی، مکان نقطهٔ M، در بیرون خط راست $۳x-y+۱=\circ$ نیست. اگر خط راست PQ، تنها در درون مثلث، یعنی از نقطهٔ A تا قاعدهٔ BC، حرکت کند، روشن است که، مکان M، پاره‌خط راستی می‌شود که یک انتهای آن، نقطهٔ A و انتهای دیگرش روی خط راست BC است. نقطه $D\left(-\frac{۱}{۳},\circ\right)$ از برخورد خط راست $۳x-y+۱=\circ$ با محور $x'x$ به دست می‌آید ولی خود نقطهٔ D، نمی‌تواند جزو مکان باشد، زیرا وقتی (PQ) بر (BC) منطبق شود، جای مشخصی برای نقطهٔ M به دست نمی‌آید.

بنابراین، در حالتی که (PQ) در فاصلهٔ از A تا (BC) حرکت کند، معادلهٔ مکان M، عبارت است از پاره‌خط راست AD، بدون خود نقطهٔ D که، در آن: $A(\circ,۱)$ و $D\left(-\frac{۱}{۳},\circ\right)$.

به زبان هندسی، مکان نقطهٔ M، پاره‌خط راستی است که راس A را به نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$ قاعده $\left(|BD| = \frac{۱}{۳}|BC|\right)$ وصل کند.

در حالتی که خط راست PQ بتواند از دو سمت، تا بی‌نهایت حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ M، خط راست $۳x - y + ۱ = ۰$، به‌جز نقطهٔ $D\left(-\frac{۱}{۳}, ۰\right)$ است.

۱۹۱. پیش از حل مساله، با یک تعریف (که با وجود سادگی آن، اهمیت زیادی دارد)، آشنا شویم.

نقطه‌ای مثل A را در نظر بگیرید. از این نقطه، بی‌نهایت خط راست عبور می‌کند. *مجموعهٔ همهٔ خط‌های راستی را که از نقطهٔ A می‌گذرند،* **یک دسته خط راست به مرکز نقطهٔ A گویند.**

به عنوان نمونه، خط راست $\alpha x + \beta y = ۰$، معرف دسته خط راستِ به مرکز مبداء مختصات است. توجه کنید: اگر دسته خط راست به مرکز مبداء مختصات را، به صورت $y = mx$ نشان دهیم، آن وقت خط راست $x = ۰$ (محور $y'y$) را از آن جدا کرده‌ایم. در $\alpha x + \beta y = ۰$، عددهای α و β نمی‌توانند با هم برابر صفر باشند ($\alpha^۲ + \beta^۲ \neq ۰$) ولی اگر بدانیم $\beta \neq ۰$، آن وقت می‌توان آن را به صورت $y = \frac{-\alpha}{\beta}x$ نوشت که با فرض $-\frac{\alpha}{\beta} = m$، به صورت $y = mx$ درمی‌آید.

در واقع، برای نوشتن دسته خط راستی که از مبداء مختصات می‌گذرند، دو خط راست را ($x = ۰$ و $y = ۰$) از بین آن‌ها انتخاب کردیم و، سپس، معادلهٔ $\alpha x + \beta y = ۰$ را تشکیل دادیم.

در حالت کلی، اگر نقطهٔ A را، نقطهٔ برخورد دو خط راستِ

$$ax + by + c = ۰ \text{ و } a'x + b'y + c' = ۰$$

فرض کنیم، آن وقت، معادلهٔ دسته خط راست به مرکز A، چنین می‌شود:

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=۰$$

و معادلهٔ

$$ax+by+c+m(a'x+b'y+c')=۰$$

معرف همین دسته خط راست، به استثنای خط راست $a'x+b'y+c'=۰$ است. به حل مسالهٔ ۱۹۱ می‌پردازیم.

معادلهٔ دو خط راست AB و AC را که از A می‌گذرند، در اختیار داریم. بنابراین، معادلهٔ کلی دسته خط راستِ به مرکز A، چنین است:

$$x+۲y-۵+m(۳x-y-۱)=۰ \qquad (۱)$$

(البته، این معادله، شامل خط راست AC نیست، ولی چون به دنبال معادلهٔ خط راست AH هستیم و نه AB، نوشتن معادلهٔ دسته خط راست به مرکز A، به صورت بالا، خللی ایجاد نمی‌کند). ضریب زاویهٔ این خط‌های راست، برابر $\frac{۳m+۱}{m-۲}$ می‌شود. ولی خط راست AH، بر خط راست BC عمود است و، بنابراین، ضریب زاویه‌ای برابر $-\frac{۲}{۳}$ دارد. پس

$$\frac{۳m+۱}{m-۲}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow m=\frac{۱}{۱۱}$$

که اگر آن را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، معادلهٔ خط راستی به دست می‌آید که از ارتفاع AH می‌گذرد:

$$۲x+۳y-۸=۰$$

معادلهٔ درجه دوّم

۱۹۲. اگر عبارت مفروض را A بنامیم، داریم:

$$A = -\frac{۱}{۲}(x^۲ - ۴x) - \frac{۷}{۲} = -\frac{۱}{۲}[(x-۲)^۲ - ۴] - \frac{۷}{۲} =$$
$$= -\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲ + ۲ - \frac{۷}{۲} = -\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲ - \frac{۳}{۲}$$

یعنی مقدار A، نمی‌تواند از $-\frac{۳}{۲}$ بیشتر باشد:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۲ \\ A = -\frac{۳}{۲} \end{array} \right. \; ; \; \left| \begin{array}{l} x \neq ۲ \\ A < -\frac{۳}{۲} \end{array} \right.$$

و برای A، همیشه عددی منفی به دست می‌آید.

۱۹۳. *پاسخ‌ها.* ۱) $x_۱ = ۲$ و $x_۲ = ۳$؛ ۲) $x_۱ = -۵$ و $x_۲ = \frac{۱}{۳}$؛ ۳) $x_۱ = ۶$ و $x_۲ = ۲$؛ ۴) $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = \frac{۲}{۵}$.

۱۹۴. ۱) با شرط $x \neq ۰$ و $x \neq ۱$، به معادلهٔ $۲x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ منجر می‌شود ($x_۱ = ۳$ و $x_۲ = \frac{۱}{۲}$)؛ ۲) با شرط $x \neq ۱$ و $x \neq -۴$، به معادلهٔ درجه دوم $۷x^۲ + ۲۷x + ۲۶ = ۰$ منجر می‌شود ($x_۱ = -۲$ و $x_۲ = \frac{۱۳}{۷}$)؛ ۳) با فرض $x \neq ۰$ و $x \neq \frac{۱}{۲}$ به معادله $۴x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$ منجر می‌شود $\left(x_{۱,۲} = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۴}\right)$؛ ۴) با شرط $a \neq ۰$ و $x \neq ۰$، به معادلهٔ $۲x^۲ - (۴a - ۱)x + ۲a^۲ - a = ۰$ می‌رسیم ($x_۱ = a$ و $x_۲ = \frac{۲a - ۱}{۲}$).

۱۹۵. ۱) $x^۲ - ۵x + ۲$ را y می‌نامیم، به معادلهٔ درجه دوم

$$y^۲ - ۴y - ۳۲ = ۰$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: $y_1 = -4$ و $y_2 = 8$. با قرار دادن هر یک از این مقدارها در $y = x^2 - 5x + 2$، دو معادلهٔ درجه دوم بر حسب x به دست می‌آید:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ و } x^2 - 5x - 6 = 0$$

پاسخ. $x_1 = 2$، $x_2 = 3$، $x_3 = -1$، $x_4 = 6$.

۲) معادلهٔ درجهٔ چهارم را، به شرطی که شامل درجه‌های اول و سوم نباشد، **معادلهٔ دو مجذوری** می‌نامند. صورت کلی معادلهٔ دو مجذوری، چنین است:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

که با فرض $y = x^2$، به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل می‌شود.

پاسخ. $x_1 = -1$، $x_2 = 1$، $x_3 = -5$، $x_4 = 5$.

۳) $(x+1)^2$ را y بگیرید، به معادلهٔ درجه دوم $y^2 - 13y + 36 = 0$ می‌رسید.

پاسخ. $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، $x_3 = -3$، $x_4 = -4$.

۴) پاسخ. $x_1 = 3$، $x_2 = 4$، $x_3 = 6$، $x_4 = 7$.

۵) حاصل $(x+1)^4$ و $(x-1)^4$ را به طور جداگانه، پیدا می‌کنیم:

$$(x+1)^4 = [(x+1)^2]^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 =$$
$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$
$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، به معادلهٔ دو مجذوری زیر تبدیل می‌شود:

$$x^4 + 6x^2 - 7 = 0$$

برای $x^۲$ دو جواب ۱ و ۷- به دست می‌آید. $x^۲ = -۷$، ریشهٔ حقیقی ندارد. ولی از $x^۲ = ۱$، دو ریشهٔ $x = \pm ۱$ به دست می‌آید.

۶) پرانتزها را به توان برسانید و ساده کنید، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسید:

$$x^۲ - x - ۶ = ۰$$

پاسخ. $x_۱ = ۳$، $x_۲ = -۲$.

۱۹۶. ۱) سمت چپ معادلهٔ مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$x(x+۱)(x+۲)(x+۳) = [x(x+۳)][(x+۱)(x+۲)] =$$
$$= (x^۲ + ۳x)(x^۲ + ۳x + ۲) = (x^۲ + ۳x)^۲ + ۲(x^۲ + ۳x)$$

بنابراین، به این معادله می‌رسیم:

$$(x^۲ + ۳x)^۲ + ۲(x^۲ + ۳x) - ۲۴ = ۰$$

که با فرض $x^۲ + ۳x = y$، به معادله‌ای درجه دوم می‌رسیم.

پاسخ. $x_۱ = ۱$، $x_۲ = -۴$ (دو ریشهٔ دیگر، حقیقی نیستند).

یادداشت. هر گاه با معادلهٔ درجه چهارمی به صورت

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$$

برخورد داشته باشید، به شرطی می‌توانید آن را حل کنید که بین چهار عدد a، b، c و d، مجموع دو تا با مجموع دو تای دیگر برابر باشد. مثلاً اگر داشته باشیم:

$$a + c = b + d$$

آن وقت، پرانتزهای شامل a و c را با هم، و پرانتزهای شامل b و d را با هم، در نظر می‌گیریم:

$$[(x+a)(x+c)][(x+b)(x+d)] = m$$

و یا

$$[x^۲ + (a+c)x + ac][x^۲ + (b+d)x + bd] = ۰$$

که با توجه به برابری $a + c = b + d$، چنین می‌شود:

$$[x^۲ + (a+c)x]^۲ + (ac+bd)[x^۲ + (a+c)x] + abcd = ۰$$

و با فرض $x^۲ + (a+c)x = y$، تبدیل به معادله‌ای درجه دوم و قابل حل می‌شود.

۲) در مسالهٔ ۱۹۵، شمارهٔ ۵، بعد از باز کردن پرانتزها، به معادله‌ای دو مجذوری رسیدیم؛ حذف جمله‌های درجه اول و درجه سوم، به این مناسبت ممکن شد که، پرانتز اول به صورت $(x+۱)^۴$ و پرانتز دوم به صورت $(x-۱)^۴$ بود. به طور کلی، در عبارت

$$(x+\alpha)^۴ + (x-\alpha)^۴$$

جمله‌های با توان فرد (یعنی جمله‌های درجه اول و درجه سوم) حذف می‌شوند.

در حالتی که پرانتزها به صورت

$$(x+\alpha)^۴ + (x+\beta)^۴$$

باشند، نصف مجموع α و β، یعنی $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ را در نظر می‌گیریم و پرانتزها را، این طور می‌نویسیم:

$$\left(x + \frac{\alpha+\beta}{۲} + \frac{\alpha-\beta}{۲}\right)^۴ + \left(x + \frac{\alpha+\beta}{۲} - \frac{\alpha-\beta}{۲}\right)^۴$$

زیرا $\alpha = \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}$ و $\beta = \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$. اکنون اگر فرض کنیم:

$$x + \frac{\alpha+\beta}{2} = y \quad \text{و} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = a$$

دو پرانتز به این صورت درمی‌آیند:

$$(y+a)^4 + (y-a)^4$$

که، بعد از باز کردن پرانتزها، جمله‌های با توان فرد، حذف می‌شوند.

در مساله ما، داریم

$$(x+2)^4 + (x+5)^4 = 17 \qquad (1)$$

نصف مجموع ۵ و ۲ برابر $\frac{7}{2}$ و نصف تفاضل آن‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین معادلهٔ (۱) را، می‌توان این طور نوشت:

$$\left(x + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)^4 + \left(x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)^4 = 17$$

که اگر فرض کنیم $y = \frac{7}{2} + x$، به دست می‌آید:

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^4 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^4 = 17$$

و بعد از باز کردن پرانتزها، چنین می‌شود:

$$2y^4 + 27y^2 - \frac{55}{8} = 0;$$

$$y^2 = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 + 55}}{4} = \frac{-27 \pm \sqrt{784}}{4} =$$

$$= \frac{-27 \pm 28}{4} = -\frac{55}{4}, \frac{1}{4}$$

$y^2 = -\frac{55}{4}$، ریشه‌های حقیقی ندارد (y^2 نمی‌تواند منفی باشد)، ولی

$$y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2},$$

$$x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -3$$

$$x + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -4$$

پاسخ. معادله دو ریشه حقیقی دارد: $x_1 = -3$ و $x_2 = -4$.

۳) راهنمائی. $y = x^2 + 3x$ فرض کنید.

پاسخ. $x_1 = 1$، $x_2 = -1$، $x_3 = -2$، $x_4 = -4$.

۴) در آغاز، مقدار سمت راست برابری را محاسبه می‌کنیم:

$$(x + a + b)^3 = [x + (a + b)]^3 =$$
$$= x^3 + 3(a + b)x^2 + 3(a + b)^2x + (a + b)^3 =$$
$$= x^3 + 3(a + b)x^2 + 3(a + b)^2x + a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

که اگر در معادله قرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^2 + (a + b)x + ab = 0$$

پاسخ. $x_1 = -a$، $x_2 = -b$.

۵) راهنمائی. یادداشت مسالهٔ ۱۹۶ (۱) را ببینید.

پاسخ. $x_1 = 0$، $x_2 = -7$، $x_3 = -3$، $x_4 = -4$.

۱۹۷. ۱) $x = 1$ در معادله صدق می‌کند، پس $x_1 = 1$. از طرف دیگر، حاصل ضرب دو ریشه، برابر است با ۱۳۷۴:

$$x_1x_2 = 1374 \Rightarrow x_2 = 1374$$

۲) $x = ۱$ در معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۱ x_۲ = -\dfrac{۱}{۱۳۷۵} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = -\dfrac{۱}{۱۳۷۵} \end{array} \right.$$

۳) $x = ۱$ در معادله صدق می‌کند. ریشهٔ دیگر برابر $-\dfrac{۶}{۵۳}$ است.

۴) $y = x^۲ + ۳x - ۱$ فرض کنید. به این معادله می‌رسید:

$$y^۲ - y - ۲ = ۰$$

پاسخ. $x_۱ = ۰$، $x_۲ = -۳$، $x_{۳,۴} = \dfrac{-۳ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$

۵) $y = x^۲ + x$ بگیرید.

پاسخ. $x_۱ = ۰$، $x_۲ = -۱$، $x_{۳,۴} = \dfrac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$.

۱۹۸. ۱) باید $x = -۱$ در معادله صدق کند؛ در این صورت $m = \dfrac{۱}{۴}$. به ازای $m = \dfrac{۱}{۴}$، به معادلهٔ $۵x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$ می‌رسیم که دو ریشه دارد: -۱ و $\dfrac{۳}{۵}$.

۲) $x = -\dfrac{۳}{۵}$ را در معادله قرار می‌دهیم، به دست می‌آید: $m = \dfrac{۳۱}{۶۴}$. به ازای این مقدار m، معادلهٔ درجه دوم مفروض، به صورت

$$۹۵x^۲ + ۲x - ۳۳ = ۰$$

که ریشه‌های آن چنین‌اند: $x_۱ = -\dfrac{۳}{۵}$، $x_۲ = \dfrac{۱۱}{۱۹}$.

۳) پاسخ. $m = ۱$ ($x_۱ = ۰$، $x_۲ = \dfrac{۱}{۲}$):

۴) وقتی دو ریشهٔ $x_۱$ و $x_۲$ قرینهٔ یکدیگر باشند ($x_۱ = -x_۲$) به معنای آن است که داشته باشیم: $x_۱ + x_۲ = ۰$ یا $-\dfrac{b}{a} = ۰$ یا $b = ۰$.

به این ترتیب، برای قرینه بودن دو ریشه، باید ضریب x (جملهٔ درجه اول) برابر صفر باشد:

$$۲m - ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

البته، باید آزمایش کنیم که، به ازای این مقدار m، معادله دارای ریشه‌های حقیقی باشد. به ازای $m = \frac{۱}{۲}$، معادلهٔ ما چنین می‌شود:

$$۳x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۵) باید داشته باشیم:

$$x_۱ = \frac{۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow \frac{m-۱}{m+۱} = ۱ \Rightarrow -۱ = ۱$$

به یک برابریِ ناممکن رسیدیم. معادله، هرگز نمی‌تواند دو ریشهٔ عکس هم داشته باشد.

۶) معادله، وقتی دو ریشهٔ برابر دارد که مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (۲m - ۱)^۲ - ۴(m+۱)(m-۱) = ۰$$

از آن‌جا $m = \frac{۵}{۴}$. به ازای این مقدار m به معادلهٔ

$$۹x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۳x - ۱)^۲ = ۰$$

می‌رسیم که دو ریشهٔ برابر (یا یک ریشهٔ مضاعف) دارد: $x_۱ = x_۲ = \frac{۱}{۳}$.

۱۹۹. ۱) با توجه به رابطه‌های بین ضریب‌ها و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم داریم:

$$\alpha + \beta = ۸, \alpha\beta = ۱۵$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 - 30 = 34;$$

$$A = \frac{7(\alpha^2+\beta^2) - 5\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3} = \frac{7 \times 34 - 5 \times 15}{8^3} = \frac{163}{512}$$

۲) با توجه به دو رابطهٔ $x_1 + x_2 = 9$ و $x_1 x_2 = 20$، داریم:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) =$$

$$= 9^3 - 3 \times 20 \times 9 = 729 - 540 = 189;$$

و برای مجموع توان‌های چهارم ریشه‌ها:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9^2 - 40 = 41,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 =$$

$$= 41^2 - 2 \times 20^2 = 1681 - 800 = 881$$

۲۰۰. باید ریشه‌های $x_1 = a$ و $x_2 = b$ در معادله صدق کنند. بنابراین، مساله منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} 2a^2 + b = 0 \\ b^2 + ab + b = 0 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$b(a+b+1) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ یا } b = -a-1$$

اگر $b = 0$، از معادلهٔ اول دستگاه معلوم می‌شود که $a = 0$؛
اگر $b = -a - 1$، با قرار دادن آن در معادلهٔ اول به دست می‌آید:

$$2a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -\frac{1}{2}$$

در حالت $a = b = ۰$، معادلهٔ مفروض، به صورت $x^۲ = ۰$ درمی‌آید که ریشه‌های آن $x_۱ = x_۲ = ۰$؛

در حالت $a = ۱$ و $b = -۲$ به معادلهٔ $x^۲ + x - ۲ = ۰$ می‌رسیم که، ریشه‌های آن: $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = -۲$؛

در حالت $a = b = -\frac{۱}{۲}$، به معادلهٔ $۲x^۲ - x - ۱$ می‌رسیم که جواب مساله نیست، زیرا در آن $x_۱ = -\frac{۱}{۲}$ و $x_۲ = ۱$، در حالی که a و b هر دو برابر $-\frac{۱}{۲}$ هستند.

در حالت اخیر،در واقع، هم a، هم b و هم یکی از ریشه‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، ولی ریشهٔ دیگر معادله، عدد دیگری است. وقتی a و b با هم برابرند، باید بنا به فرض مساله، $x_۱$ و $x_۲$ هم با یکدیگر برابر باشند، یعنی باید مبین معادله $(\Delta = a^۲ - ۴b)$ برابر صفر شود، در حالی که $a = b = -\frac{۱}{۲}$ در معادلهٔ $a^۲ - ۴b = ۰$ صدق نمی‌کند.

پاسخ. $a = b = ۰$ یا $a = ۱$ و $b = -۲$.

۲۰۱. ۱) مجموع و حاصل ضرب دو ریشه را محاسبه می‌کنیم:

$$S = -۳ + \frac{۱}{۷} = -\frac{۲۰}{۷}, P = -۳ \times \frac{۱}{۷} = -\frac{۳}{۷}$$

بنابراین، معادله‌ای که ریشه‌های آن -۳ و $\frac{۱}{۷}$ باشند، چنین است:

$$x^۲ + \frac{۲۰}{۷}x - \frac{۳}{۷} = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ + ۲۰x - ۳ = ۰$$

۲) $S = ۲a$ و $P = a^۲ - b^۲$ و

$$x^۲ - ۲ax + a^۲ - b^۲ = ۰$$

۳) پاسخ. $a^2x^2 - 2ax + 1 - a^2 = 0$

۲۰۲. ۱) برای این که، معادلهٔ مفروض، دو ریشهٔ برابر داشته باشند، باید مبیّن آن برابر صفر باشد:

$$\Delta = (m-3)^2 - 4(m-2) = m^2 - 10m + 17;$$
$$m^2 - 10m + 17 = 0 \Rightarrow m = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

جواب‌ها را آزمایش می‌کنیم: برای $m = 5 + 2\sqrt{2}$، معادله چنین می‌شود:

$$x^2 - 2(1+\sqrt{2})x + 3 + 2\sqrt{2} = 0 = [x - (\sqrt{2}+1)]^2 = 0$$

پس $x_1 = x_2 = \sqrt{2} + 1$. و برای $m = 5 - 2\sqrt{2}$:

$$x^2 - 2(1-\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = [x - (1-\sqrt{2})]^2 = 0$$

یعنی $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

۲) با توجه به این که $x_1 + x_2 = m - 3$ و $x_1x_2 = m - 2$، داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= (m-3)^2 - 2(m-2) = m^2 - 8m + 13$$

که بنا به شرط مساله باید برابر ۱۳ باشد:

$$m^2 - 8m + 13 = 13 \Rightarrow m^2 - 8m = 0$$

یعنی $m = 0$ یا $m = 8$.

باید آزمایش کنیم که، در حالتی، با ریشه‌های موهومی سروکار پیدا نکرده باشیم. برای $m = ۰$، به این معادله می‌رسیم:

$$x^۲ + ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{-۳ + \sqrt{۱۷}}{۲}, x_۲ = \frac{-۳ - \sqrt{۱۷}}{۲};$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = \frac{۲۶ - ۶\sqrt{۱۷}}{۴} + \frac{۲۶ + ۶\sqrt{۱۷}}{۴} = \frac{۵۲}{۴} = ۱۳$$

و برای $m = ۸$:

$$x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۳, x_۲ = ۲;$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۳^۲ + ۲^۲ = ۹ + ۴ = ۱۳$$

پاسخ. $m = ۰$ یا $m = ۸$.

۳) به ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱ x_۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳(x_۱ + x_۲) = x_۱ x_۲$$

که با توجه به دستورهای ویت، چنین می‌شود:

$$۳(m - ۳) = (m - ۲) \Rightarrow m = \frac{۷}{۲}$$

آزمایش جواب. معادلهٔ مفروض به ازای $m = \frac{۷}{۲}$ چنین می‌شود:

$$۲x^۲ - x + ۳ = ۰$$

که ریشه‌هایی حقیقی ندارد.

پاسخ. معادلهٔ (۱)، به ازای هیچ کدام از عددهای حقیقی برای m، نمی‌تواند دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد که، مجموع عکس آن‌ها، برابر $\frac{۱}{۳}$ شود.

۴) بنا به شرط مساله $x_2 - x_1 = 1$. در این گونه موردها، که رابطه‌ای بین دو ریشه به ما داده شده است، بین رابطه‌ای که مساله داده است و رابطهٔ مربوط به مجموع ریشه‌ها، x_1 و x_2 را بر حسب پارامتر (در این‌جا m) پیدا کنید و، سپس، در رابطهٔ حاصل ضرب قرار دهید.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = m - 3 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m-2}{2} \\ x_2 = \dfrac{m-4}{2} \end{array} \right. ;$$

$$x_1 x_2 = m - 2 \Rightarrow \frac{m-2}{2} \times \frac{m-4}{2} = m - 2$$

که از آن‌جا به معادلهٔ $(m-2)(m-8) = 0$ می‌رسیم، یعنی $m = 2$ یا $m = 8$.

به ازای $m = 2$ به معادلهٔ $x^2 + x = 0$ با دو جواب -1 و 0 می‌رسیم که با شرط مساله سازگار است.

به ازای $m = 8$ به معادلهٔ $x^2 - 5x + 6 = 0$ می‌رسیم که، دو ریشهٔ آن، ۲ و ۳، با شرط مساله سازگارند.

پاسخ. $m = 0$ یا $m = 8$.

۵) شبیه قبل، عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = m - 3 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 2m - 13 \\ x_2 = 10 - m \end{array} \right. ;$$

$$x_1 x_2 = m - 2 \Rightarrow (10 - m)(2m - 13) = m - 2$$

که از آن‌جا، به معادلهٔ $(m-8)^2 = 0$ یا $m = 8$ می‌رسیم.

به ازای $m = 8$، معادلهٔ مفروضِ (۱) به صورت

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

درمی‌آید که دو ریشهٔ آن $x_1 = 3$ و $x_2 = 2$ است و، در نتیجه، مجموع x_1 با دو برابر x_2 برابر ۷ می‌شود.

۶) باید $x = m$ در معادلهٔ (۱) صدق کند که، از آن‌جا، $m = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید؛ اگر $m = \frac{1}{2}$ را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، به معادلهٔ

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$$

و همان طور که می‌بینید، یکی از ریشه‌های آن، برابر $\frac{1}{2}$ (همان مقدار m) شده است.

۲۰۳. ۱) این مساله را به سه روش حل می‌کنیم.

روش اول. ریشه‌های معادلهٔ مفروض را به دست می‌آوریم:

$$9x^2 - 9x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$$

مجهول معادلهٔ درجه دومی را، که باید پیدا کنیم، y و ریشه‌های آن را y_1 و y_2 می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$y_1 = 3x_1 = 5, y_2 = 3x_2 = -2;$$
$$y_1 + y_2 = 5 - 2 = 3, y_1y_2 = -10$$

و بنابراین، معادلهٔ مورد نظر چنین است:

$$y^2 - 3y - 10 = 0$$

روش دوم. لازم نیست، معادلهٔ مفروض را حل کنیم، تنها از دستورهای ویت، استفاده می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -\frac{10}{9}.$$

باید داشته باشیم:

$$y_۱ = ۳x_۱, y_۲ = ۳x_۲$$

بنابراین

$$y_۱ + y_۲ = ۳(x_۱ + x_۲) = ۳,$$
$$y \cdot y_۲ = ۳x_۱ \cdot ۳x_۲ = ۹x_۱x_۲ = -۱۰$$

و با در دست داشتن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها، معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$y^۲ - ۳y - ۱۰ = ۰$$

روش سوم. می‌توان، حتا بدون استفاده از دستورهای ویت، معادلهٔ جدید را تشکیل داد. باید، بنا به فرض مساله، داشته باشیم:

$$y = ۳x \Rightarrow x = \frac{y}{۳}$$

در معادلهٔ $۹x^۲ - ۹x - ۱۰ = ۰$، به جای x، مقدارش $\frac{y}{۳}$ را قرار دهیم:

$$۹\left(\frac{y}{۳}\right)^۲ - ۹\left(\frac{y}{۳}\right) - ۱۰ \Rightarrow y^۲ - ۳y - ۱۰ = ۰$$

روشن است که، روش سوم، ساده‌ترین و زیباترین روش‌ها، برای حل این‌گونه مساله‌هاست، به ویژه اگر معادلهٔ مفروض، ریشه‌های گنگ یا موهومی داشته باشد، یا اگر معادله به صورت پارامتری داده شده باشد، روش‌های اول و دوم، منجر به محاسبه‌های ملال آور می‌شوند، در حالی که، عمل‌های مربوط به روش سوم، چندان تغییر نمی‌کند.

۲) باید داشته باشیم: $y = mx$ (y، مجهول معادلهٔ جدید است)، یا $x = \frac{y}{m}$. این مقدار x را در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ قرار می‌دهیم، معادلهٔ مورد نظر به دست می‌آید:

$$a\left(\frac{y}{m}\right)^۲ + b\left(\frac{y}{m}\right) + c = ۰$$

و یا پس از عمل‌های ساده

$$ay^۲ + bmy + cm^۲ = ۰$$

۳) اگر مجهول معادلهٔ جدید را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$y = x + ۱ \Rightarrow x = y - ۱$$

این مقدار x را در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم:

$$(y - ۱)^۲ - (y - ۱) + a = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۳y + a + ۲ = ۰$$

۲۰۴. اگر ضریب $x^۲$ را a و ریشه‌های سه جمله‌ای را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، آن وقت سه جمله‌ای به صورت

$$a(x - x_۱)(x - x_۲)$$

تجزیه می‌شود ($x_۱$ و $x_۲$، عددهایی حقیقی‌اند.)

پاسخ‌ها.

$$۱)\ ۲x^۲ - ۲۴x + ۷۰ = ۲(x - ۵)(x - ۷);$$

$$۲)\ x^۲ - ۲ax + a^۲ - b^۲ = (x - a - b)(x - a + b);$$

$$۳)\ nx^۲ - m(n^۲ + ۱)x + m^۲n = n\left(x - \frac{m}{n}\right)(x - mn) =$$

$$= (nx - m)(x - mn)$$

$$۴)\ (a^۲ + a)^۲ - ۴(a^۲ + a) - ۱۲ = (a^۲ + a - ۲)(a^۲ + a + ۶) =$$

$$= (a - ۱)(a + ۲)(a^۲ + a + ۶)$$

($a^۲ + a + ۶$، ریشه‌های حقیقی ندارند و قابل تجزیه به ضرب عامل‌های خطی نیست)

۵) راهنمائی. $x^۲ + x + ۴$ را y بنامید و y را بر حسب x پیدا کنید: $y_۱ = -۳x$، $y_۲ = -۵x$.

$$(x^۲ + x + ۴)^۲ + ۸x(x^۲ + x + ۴) + ۱۵x^۲ =$$

$$= [(x^۲ + x + ۴) + ۳x][(x^۲ + x + ۴) + ۵x] =$$

$$= (x^۲ + ۴x + ۴)(x^۲ + ۶x + ۴) =$$

$$= (x + ۲)^۲(x + ۳ + \sqrt{۵})(x + ۳ - \sqrt{۵})$$

۲۰۵. فرض می‌کنیم، ریشهٔ مشترک دو معادله برابر a باشد، یعنی $x = a$، در هر دو معادله صدق کند:

$$\begin{cases} a^۲ - ۳a + ۲m + ۶ = ۰ \\ a^۲ - ۶a + m + ۷ = ۰ \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم را از معادله اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۳a = ۱ - m \Rightarrow a = \frac{-m + ۱}{۳}$$

این مقدار a، باید در هر یک از دو معادله صدق کند. آن را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{(۱ - m)^۲}{۹} - ۳ \times \frac{۱ - m}{۳} + ۲m + ۶ = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۲۵m + ۴۶ = ۰ \Rightarrow m_۱ = -۲, m_۲ = -۲۳$$

به ازای $m = -۲$، به این دو معادله می‌رسیم:

$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱, x_۲ = ۲;$$
$$x^۲ - ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱, x_۲ = ۵$$

که $x = ۱$، ریشهٔ مشترک آن‌هاست.

به ازای $m = -۲۳$، دو معادله، چنین می‌شوند.

$$x^۲ - ۳x - ۴۰ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۸, x_۲ = -۵;$$
$$x^۲ - ۶x - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۸, x_۲ = -۲$$

که $x = ۸$، ریشهٔ مشترک آن‌هاست.

یادداشت. ریشهٔ مشترک دو معادله را a گرفتیم و، سپس، a را بین دو معادله، بر حسب m به دست آوردیم. می‌توانستیم از واسطهٔ a استفاده نکنیم و، از همان آغاز بین دو معادله، x را بر حسب m محاسبه کنیم و مقدار آن را، در یکی از دو معادله قرار دهیم.

۲۰۶. از برابری $x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۲$، به دست می‌آید: $q = ۲p^۲ - ۱$.

نمودار مکان در شکل ۱۱۴ داده شده است.

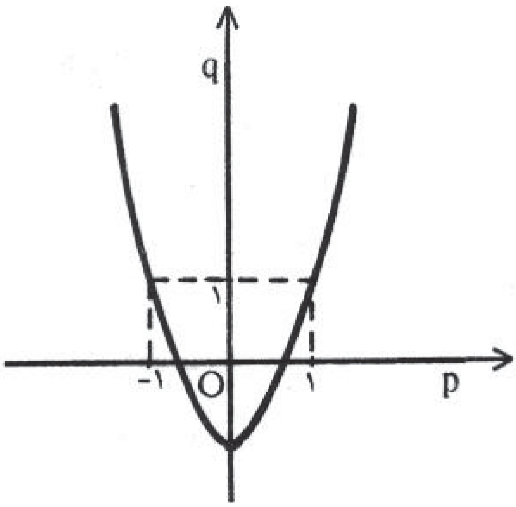
۲۰۷. ریشه‌های معادله چنین‌اند:

$$x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۴a^۲ + ۱۲a}}{۲a} = \frac{۳ \pm (۲a + ۳)}{۲a}$$

بنابراین $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = \frac{a + ۳}{a}$.

یکی از ریشه‌ها $(x_۱ = -۱)$ همیشه عددی درست است؛ برای $x_۲$ داریم:

$$x_۲ = \frac{a + ۳}{a} = ۱ + \frac{۳}{a}$$



شکل ۱۱۴ :

و برای این که x_2 عدد درستی باشد، باید a برابر ± 1 یا ± 3 باشد.

پاسخ. $a = -1$ یا $a = 1$ یا $a = -3$ یا $a = 3$.

۲۰۸. برای مجموع مجذورهای دو ریشه، داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m+3)^2 - 2(m-1) =$$
$$= 4m^2 + 10m + 11 = \left(2m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4}$$

مجموع مجذورهای دو ریشه، نمی‌تواند از $\frac{19}{4}$ کمتر باشد. کمترین مقدار مجموع مجذورهای دو ریشه، برابر $\frac{19}{4}$ است که به ازای $m = -\frac{5}{4}$ به دست می‌آید.

۲۰۹. اگر قرار باشد، این معادله، ریشهٔ گویا داشته باشد، باید مبین آن، یعنی $b^2 - 4ac$، مجذور کامل باشد: $b^2 - 4ac = m^2$؛ در ضمن، چون a و c، عددهایی مثبت‌اند، بدون شک $m < b$ ($a \neq 0$، زیرا a ضریب x^2 است و $c \neq 0$، زیرا به ازای $c = 0$، عدد $\overline{abc}$ نمی‌تواند اول باشد).

با فرض $b^2 - 4ac = m^2$، می‌توان نوشت:

$$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b - m)(2ax + b + m)$$

عدد $\overline{abc}$ را می‌توان به صورت

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

نوشت که همان سه جمله‌ای $ax^۲ + bx + c$، به ازای $x = ۱۰$ است. به این ترتیب، $ax^۲ + bx + c$، به ازای $x = ۱۰$ بر عدد $\overline{abc}$ بخش‌پذیر است (دو عدد با هم برابرند)؛ در نتیجه، عبارت $۴a(ax^۲ + bx + c)$ هم، به ازای $x = ۱۰$، باید بر $\overline{abc}$ بخش‌پذیر باشد و این، وقتی ممکن است که، یکی از دو عبارت

$$۲ax + b + m \text{ یا } ۲ax + b - m$$

به ازای $x = ۱۰$، بر $\overline{abc}$، یعنی $۱۰۰a + ۱۰b + c$ بخش‌پذیر باشد، یعنی، به هر حال، باید داشته باشیم:

$$۱۰۰a + ۱۰b + c \leq ۲۰a + b + m \Rightarrow ۸۰a + ۹b + c \leq m$$

و این، ممکن نیست، زیرا با توجه به نابرابری $b > n$، نمی‌تواند برقرار باشد.

به این ترتیب، فرض ما مبنی بر مجذور کامل بودن $b^۲ - ۴ac$، نادرست بود. مبین معادله، مجذور کامل نیست و، بنابراین، معادله ریشهٔ گویا ندارد.

۲۱۰. در هندسه ثابت می‌کنند، تعداد قطرهای یک n ضلعی کوژ، برابر است با $\frac{۱}{۲}n(n - ۳)$. اگر یک n ضلعی کوژ، ۱۳۷۵ قطر داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲}n(n - ۳) = ۱۳۷۵ \Rightarrow n^۲ - ۳n - ۲۷۵۰ = ۰$$

و این معادله، ریشهٔ گویا ندارد، زیرا مبین آن

$$\Delta = ۹ + ۴ \times ۲۷۵۰ = ۱۱۰۰۹$$

مجذور کامل نیست.

۲۱۱. فرض می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{a^۲ - ۱}{b + ۱}, \beta = \frac{b^۲ - ۱}{a + ۱}$$

در این صورت، خواهیم داشت

$$\alpha\beta = \frac{a^۲ - ۱}{b + ۱} \cdot \frac{b^۲ - ۱}{a + ۱} = (a - ۱)(b - ۱) = m$$

حاصل ضرب دو کسر، عددی درست است که، آن را، m نامیده‌ایم. بنا بر فرض، مجموع این دو کسر هم، عددی درست است؛ آن را n می‌نامیم:

$$\alpha + \beta = \frac{a^۲ - ۱}{b + ۱} + \frac{b^۲ - ۱}{a + ۱} = n$$

به این ترتیب، α و β، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - mx + n = ۰ \qquad (۱)$$

هستند که ضریب‌هایی درست دارد. چون α و β، عددهایی گویا هستند (a و b، عددهایی طبیعی‌اند و، بنابراین، هر یک از کسرهای $\frac{a^۲ - ۱}{b + ۱}$ و $\frac{b^۲ - ۱}{a + ۱}$، عددی گویاست)، باید مبین معادلهٔ (۱)، یعنی $m^۲ - ۴n$ بتواند از زیر رادیکال بیرون بیاید: $\sqrt{m^۲ - ۴n}$ عددی درست است در ضمن، اگر m عددی زوج باشد، حاصل این رادیکال زوج، و اگر m فرد باشد، حاصل رادیکال فرد است (زیرا $۴n$، عددی زوج است)، پس عبارت $m - \sqrt{m^۲ - ۴n}$ عددی زوج و بر ۲ بخش‌پذیر است. به این ترتیب، هر یک از عددهای

$$\alpha, \beta = \frac{m \pm \sqrt{m^۲ - ۴n}}{۲}$$

عددی درست است.

۲۱۲. $y = ۱ - ۶x^۲$ می‌گیریم. در این صورت، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۱ - ۶x^۲ = y \\ ۱ - ۶y^۲ = x \end{cases}$$

و اگر معادلهٔ اول دستگاه را از معادلهٔ دوم کم کنیم:

$$۶(x^۲ - y^۲) = x - y \Rightarrow (x - y)[۶(x + y) - ۱] = ۰$$

بنابراین

$$x - y = ۰ \text{ یا } x + y = \frac{۱}{۶}$$

اگر $x - y = ۰$، آن‌گاه

$$۶x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -\frac{۱}{۲}, x_۲ = \frac{۱}{۳}$$

اگر $x + y = \frac{۱}{۶}$، آن‌گاه

$$۳۶x^۲ - ۶x - ۵ = ۰ \Rightarrow x_{۳,۴} = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۱۲}$$

یادداشت. این معادله را می‌توان در حالت کلی و وقتی به صورت

$$x = a - b(a - bx^۲)^۲$$

باشد، با همان روش حل مسالهٔ ۲۲۲ حل کرد.

۲۲۳. داریم:

$$\alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = k^۳ + ۳k^۲;$$
$$\alpha^۳\beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = (-k)^۳ = -k^۳$$

بنابراین

$$\alpha^۳ + \beta^۳ + \alpha^۳\beta^۳ = (k^۳ + ۳k^۲) - k^۳ = ۳k^۲$$

که به ازای $k = ۰$ برابر صفر و به ازای $k \neq ۰$، مقداری مثبت است.

۲۲۴. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = m$ می‌گیریم. در این صورت، با مجذور کردن آن، به دست می‌آید:

$$a + b + ۲\sqrt{ab} = m^۲ \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{m^۲ - a - b}{۲} = n$$

روشن است که n، یعنی $\sqrt{ab}$، عددی گویاست. اکنون، معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن، برابر $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ باشد. داریم:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = m \text{ و } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = n$$

بنابراین، معادلهٔ درجه دوم، به این صورت است:

$$x^۲ - mx + n = ۰$$

و ریشه‌های آن:

$$\sqrt{a}, \sqrt{b} = \frac{m \pm \sqrt{m^۲ - ۴n}}{۲}$$

کافی است ثابت کنیم، $\sqrt{m^۲ - ۴n}$ عدد گویاست تا نتیجه بگیریم که $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ هم، عددهایی گویا هستند. داریم:

$$\sqrt{a} = \frac{m + \sqrt{m^۲ - ۴n}}{۲}$$

بنابراین

$$4a = (2\sqrt{a})^2 = 2m^2 - 4n + 2m\sqrt{m^2 - 4n}$$

از آن‌جا

$$\sqrt{m^2 - 4n} = \frac{4a - 2m^2 + 4n}{2m}$$

سمت راست این برابری، عددی است گویا، در نتیجه $\sqrt{m^2 - 4n}$ هم، عددی گویا می‌شود.

۲۲۵. با توجه به دستورهای ویت داریم:

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$$

از طرف دیگر

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 3 + 2 = 5$$

بنابراین: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}$. به همین ترتیب:

$$(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta})^2 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + 2\sqrt[4]{\alpha\beta} = \sqrt{5} + 2$$

و بنابراین $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

۲۲۶. معادله را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم،

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x(x + 1) - a = 0;$$
$$x^2(x + 1)^2 - x(x + 1) - a = 0$$

که با فرض $t = x(x + 1)$، به دست می‌آید:

$$t^2 - t - a = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a + 1})$$

به این ترتیب

$$x^2 + x - \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a+1}) = 0$$

در نتیجه

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{4a+1}})$$

بررسی حقیقی بودن ریشه‌ها. برای حقیقی بودن ریشه‌ها:

۱) باید داشته باشیم $4a + 1 \geq 0$ یا $a \geq -\frac{1}{4}$؛

۲) به شرط $a \geq -\frac{1}{4}$، عبارت $3 + 2\sqrt{4a+1}$ همیشه مثبت است؛

۳) برای این که $3 - 2\sqrt{4a+1}$، منفی نباشد:

$$3 - 2\sqrt{4a+1} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{4a+1} \leq 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(4a+1) \leq 9 \Rightarrow 16a \leq 5 \Rightarrow a \leq \frac{5}{16}$$

پاسخ. اگر $a < -\frac{1}{4}$ معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد؛

اگر $a = -\frac{1}{4}$ آن وقت معادله، چهار ریشه حقیقی دارد که دو به دو برابرند (یعنی دو ریشهٔ مضاعف دارد):

$$x_1 = x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, x_3 = x_4 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

۳) اگر $-\frac{1}{4} < a < \frac{5}{16}$، معادله، چهار ریشهٔ حقیقی متفاوت دارد؛

۴) اگر $a = \frac{5}{16}$، معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است که دو تای آن‌ها، با هم برابرند:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{6}-1}{2}, x_4 = -\frac{\sqrt{6}+1}{2}$$

۵) اگر $a > \frac{۵}{۱۶}$، آن وقت معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x_{۱,۲} = \frac{۱}{۲}(-۱ \pm \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۴a + ۱}})$$

۲۲۷. روشن است که $(۰, ۰)$ یکی از جواب‌های دستگاه است. $x \neq ۰$ می‌گیریم و دستگاه را به صورت

$$\begin{cases} y^۳ = x + ۳y \\ x^۳ = ۳x - y \end{cases}$$

می‌نویسیم. اگر $y = tx$ فرض کنیم، داریم

$$t^۳ = \frac{y^۳}{x^۳} = \frac{x + ۳y}{۳x - y} = \frac{۱ + ۳t}{۳ - t}$$

بنابراین

$$t^۳ = \frac{۱ + ۳t}{۳ - t} \Rightarrow t^۴ - ۳t^۳ + ۳t + ۱ = ۰$$

که از آن‌جا، به سادگی به دست می‌آید:

$$(t^۲ - ۱)^۲ - ۳t(t^۲ - ۱) + ۲t^۲ = ۰$$

این معادله، نسبت به $(t^۲ - ۱)$ از درجهٔ دوم است، یعنی

$$t^۲ - ۱ = \frac{۳t \pm \sqrt{۹t^۲ - ۸t^۲}}{۲} = \frac{۳t \pm t}{۲}$$

بنابراین

$$۱)\ t = ۱ \pm \sqrt{۲}, \quad ۲)\ t = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

معادلهٔ دوم دستگاه را، می‌توان این طور نوشت:

$$x^۳ = x\left(۳ - \frac{y}{x}\right) \Rightarrow x^۳ = x(۳ - t) \Rightarrow$$
$$x^۳ = ۳x - tx$$

ولی $x \neq ۰$، بنابراین

$$x = \pm\sqrt{۳t} \text{ و } y = \pm t\sqrt{۳ - t}$$

که اگر به جای t، چهار مقداری که، پیش از این به دست آوردیم، قرار دهیم، جواب‌های دستگاه به دست می‌آید.

پاسخ. دستگاه، ۹ جواب برای (x, y) دارد:

$$۱)\ (۰, ۰);\quad ۲)\ \left(\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}, \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}\right);$$
$$۳)\ \left(-\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}, -\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}\right);\quad ۴)\ \left(\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}, -\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}\right);$$
$$۵)\ \left(-\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}, \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}\right);$$
$$۶)\ \left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}, \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}\right);$$
$$۷)\ \left(-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}, \frac{۱}{۲} + \sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}\right);$$
$$۸)\ \left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}, -\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}\right);$$
$$۹)\ \left(-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}, \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}\right)$$

یادداشت. این مطلب ثابت شده است که، تعداد جواب‌های یک دستگاه، برابر است با حاصل ضرب درجه‌های معادله‌های دستگاه، در این‌جا، با دستگاهی شامل دو معادله دو مجهولی سروکار داشتیم که، هر کدام، از درجهٔ

سوم بودند؛ بنابراین، حاصل ضرب درجه‌ها برابر ۹ می‌شود و دستگاه هم دارای ۹ جواب است. البته، ممکن است، برخی از جواب‌ها با هم برابر یا موهومی باشند.

نابرابری و نامعادله

۲۲۸. ۱) دو طرف نابرابری مثبت‌اند و، با مجذور کردن آن‌ها، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند. بنابراین، اثبات درستی نابرابری مفروض، منجر به اثبات درستی این نابرابری می‌شود:

$$(2\sqrt{50})^2 > (\sqrt{49} + \sqrt{51})^2 \Rightarrow 200 > 49 + 51 + 2\sqrt{2449} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100 > 2\sqrt{2449} \Rightarrow 50 > \sqrt{2449}$$

که اگر دوباره، دو طرف را مجذور کنیم، به نابرابری روشن $2500 > 2449$ می‌رسیم.

۲) نابرابری را، به ترتیب، این طور می‌نویسیم:

$$(\sqrt{101} + \sqrt{102})^2 > (10 + \sqrt{103})^2;$$
$$101 + 102 + 2\sqrt{101 \times 102} > 100 + 103 + 20\sqrt{103};$$
$$\sqrt{10302} > 10\sqrt{103};\ 10302 > 10300$$

که درستی آن، روشن است.

۳) نابرابری را می‌توان این طور نوشت:

$$\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{99} = \sqrt[3]{101} - \sqrt[3]{100} \qquad (1)$$

اتحاد $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ را به یاد بیاورید. در این صورت

$$(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{99})(\sqrt[3]{100^2} + \sqrt[3]{100 \times 99} + \sqrt[3]{99^2}) =$$

$$= ۱۰۰ - ۹۹ = ۱;$$

$$(\sqrt[۳]{۱۰۱} - \sqrt[۳]{۱۰۰})(\sqrt[۳]{۱۰۱^۲} + \sqrt[۳]{۱۰۱ \times ۱۰۰} + \sqrt[۳]{۱۰۰^۲}) = ۱۰۱ - ۱۰۰ = ۱$$

اکنون، اگر برای هر طرف نابرابری (۱)، مخرج واحد در نظر بگیریم؛ سپس، صورت و مخرج سمت چپ نابرابری را در

$$\sqrt[۳]{۱۰۰^۲} + \sqrt[۳]{۱۰۰ \times ۹۹} + \sqrt[۳]{۹۹^۲}$$

و صورت و مخرج سمت راست نابرابری را در

$$\sqrt[۳]{۱۰۱^۲} + \sqrt[۳]{۱۰۱ \times ۱۰۰} + \sqrt[۳]{۱۰۰^۲}$$

ضرب کنیم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۰۰^۲} + \sqrt[۳]{۱۰۰ \times ۹۹} + \sqrt[۳]{۹۹^۲}} > \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۰۱^۲} + \sqrt[۳]{۱۰۱ \times ۱۰۰} + \sqrt[۳]{۱۰۰^۲}}$$

که درستی آن روشن است، زیرا جمله‌های مخرج سمت چپ، به ترتیب، از جمله‌های مخرج سمت راست کوچکترند و اگر دو کسر صورت‌های برابر داشته باشند، آن که مخرج کوچکتر دارد، خودش بزرگتر است.

۴) به ترتیب داریم:

$$۶۳^{۱۱} < ۶۴^{۱۱} = (۲^۶)^{۱۱} = ۲^{۶۶} = ۲ \times ۲^{۶۵} < ۲^{۶۵} = (۲^۵)^{۱۳} = ۳۲^{۱۳} < ۳۳^{۱۳}$$

۵) ابتدا نابرابری را به این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{x-۱} > \sqrt[۳]{x+۲} - \sqrt[۳]{x+۱}$$

و شبیه حالت عددی ۳) حل می‌کنیم؛ به یک نابرابری روشن می‌رسیم.

۶) به ترتیب داریم:

$$\frac{x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{(x^۲+۱)+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

اگر $\sqrt{x^۲+۱}$ را a بنامیم ($a>۰$)، باید ثابت کنیم:

$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲$$

که به سادگی به نابرابری روشن $(a-۱)^۲\geq ۰$ منجر می‌شود. حالت برابری، برای $a=۱$ یا $x=۰$ است.

۲۲۹. اگر فرض کنیم: $a=x^۳$، $b=y^۳$ و $c=z^۳$، باید ثابت کنیم:

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz\geq ۰$$

این اتحاد را در جلد اول کتاب (بخش اتحادها) دیده‌ایم:

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz=(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-xz)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}&x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-xz=\\&=\frac{۱}{۲}(۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲yz-۲xz)=\\&=\frac{۱}{۲}[(x^۲-۲xy+y^۲)+(y^۲-۲yz+z^۲)+\\&+(x^۲-۲xz+z^۲)]=\\&=\frac{۱}{۲}[(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲]\end{aligned}$$

به این ترتیب، باید ثابت کنیم:

$$\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

که درستی آن روشن است ($x+y+z$، مقداری مثبت و عبارت داخل کروشه، مقداری غیر منفی است). نابرابری، وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$x=y=z \Rightarrow a=b=c$$

۲۳۰. ۱) بستگی به مقدار x دارد. ببینیم، چه زمانی x از $\frac{1}{x}$ بزرگتر است؟

$$x>\frac{1}{x} \Rightarrow x-\frac{1}{x}>0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x}>0$$

ابتدا $x>0$ می‌گیریم، باید x را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$x^2-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)>0$$

اگر $x-1>0$ و $x+1>0$، آن وقت به دست می‌آید $x>1$ (که در ضمن، مثبت است)؛

اگر $x-1<0$ و $x+1<0$، به دست می‌آید $x<-1$ که با شرط مثبت بودن x سازگار نیست.

اکنون فرض می‌کنیم $x<0$:

اگر $x-1>0$ و $x+1<0$، به دست می‌آید: $x>1$ و $x<-1$، که با هم ناسازگارند؛

اگر $x-1<0$ و $x+1>0$، به دست می‌آید: $-1<x<1$.

چون مقدار x را منفی گرفتیم، باید $-1<x<0$ را در نظر بگیریم.

به این ترتیب، وقتی $x>\frac{1}{x}$ که داشته باشیم:

$$-1<x<0 \text{ یا } x>1$$

پاسخ. اگر $x < -1$ یا $0 < x < 1$، آن وقت $x < \frac{1}{x}$؛

اگر $-1 < x < 0$ یا $x > 1$، آن وقت $\frac{1}{x} < x$؛

اگر $x = 1$ یا $x = -1$، آن وقت $\frac{1}{x} = x$.

۲) پاسخ. اگر $x < 0$ یا $x > 1$، آن وقت $x < x^2$؛

اگر $0 < x < 1$، آن وقت $x^2 < x$؛

اگر $x = 1$ یا $x = 0$، آن وقت $x = x^2$.

۳) پاسخ. اگر $a < 0$، آن وقت $a < -a$؛

اگر $a > 0$، آن وقت $-a < a$؛

اگر $a = 0$، آن وقت $-a = a$.

۲۳۱. ۱) پاسخ. بله، با شرط $a^2 \neq b^2$، همیشه $a \neq b$؛

۲) پاسخ. نه! مثلاً $-3 < 2$، ولی $(-3)^2 > 2^2$.

۲۳۲. با توجه به نابرابری روشن $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ (برای x و y مثبت)، به دست می‌آید

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

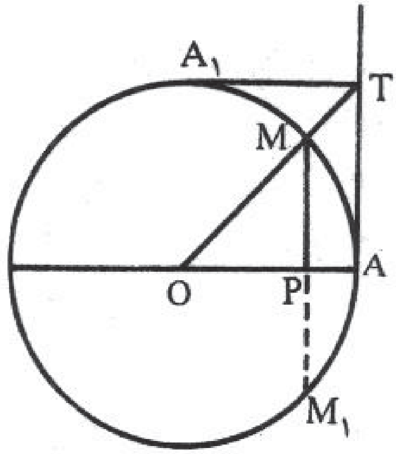
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ac}$$

چون در هر یک از این نابرابری‌ها، هر دو طرف، مقدارهایی مثبت‌اند، می‌توانیم آن‌ها را، جمله به جمله، در هم ضرب کنیم:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

و یا

$$\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc} \geq 8$$



شکل ۱۱۵

نابرابری، وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم: $a = b = c$.

۲۳۳. در هندسه قبول کرده‌اند:

۱) کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه، طول پاره‌خط راستی است که، این دو نقطه را به هم وصل می‌کند؛

۲) اگر دو نقطه را به وسیلهٔ دو خط شکسته یا منحنی به هم وصل کنیم، به شرطی که هر دو خط محدب (کوژ) باشند، آن که در درون دیگری قرار گرفته است، طولی کمتر دارد.

اکنون به شکل ۱۱۵ توجه کنید. کمان AM را x می‌نامیم؛ در این صورت

$$\widehat{AM}= x, |PM| = \sin x, |AT| = \text{tg} x$$

اگر خط راستی که از MP می‌گذرد، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ $M_۱$ قطع کند، طول کمان $MM_۱$، از طول پاره‌خط راست $MM_۱$ بزرگتر است:

$$|MM_۱| < \widehat{MM}_۱ \Rightarrow ۲\sin x < ۲x$$

از آن‌جا $\sin x < x$.

اکنون از نقطهٔ T، مماس دیگری بر دایره رسم می‌کنیم (مماس $TA_۱$). روشن است که کمان $AA_۱$، طولی دو برابر کمان AM دارد و، در ضمن $|TA| = |TA_۱|$.

از طرف دیگر

$$\widehat{AA_۱} < |AT| + |A_۱T| \Rightarrow ۲\,\widehat{AM} < ۲|AT|$$

که از آنجا به دست می‌آید، $x < \mathrm{tg}x$. اگر دو نابرابری را با هم بنویسیم:

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x$$

یادداشت. مراقب باشید، نابرابری‌های

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x$$

تنها وقتی درست‌اند که کمان x با واحد رادیان بیان شود.

۲۳۴. سمت چپ نابرابری را A می‌نامیم و، بدون این‌که به کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $a \leq b \leq c$. در این صورت، در هر حال،

$$b + c - a > ۰ \text{ و } a + c - b > ۰$$

دو حالت پیش می‌آید:

۱) $a + b \leq c$. در این حالت، عبارت $a + b - c$، مقداری منفی یا صفر می‌شود و، در نتیجه $A \leq ۰$؛ و چون $abc > ۰$ (a و b و c، مقدارهایی مثبت‌اند)، پس $A < abc$.

۲) $a + b > c$. در این حالت، هر سه پرانتزی که A را تشکیل داده‌اند، مثبت‌اند و در نتیجه $A > ۰$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$A = \sqrt{(a+b-c)^۲(b+c-a)^۲(c+a-b)^۲}$$

عبارت زیر رادیکال را، این طور می‌نویسیم:

$$[a+(b-c)][a-(b-c)][b+(c-a)]\times$$
$$\times[b-(c-a)][c+(a-b)][c-(a-b)]$$

که اگر کروشه‌ها را، دو به دو، در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$[a^۲-(b-c)^۲][b^۲-(c-a)^۲][c^۲-(a-b)^۲]$$

روشن است که، کروشهٔ اول از $a^۲$، کروشهٔ دوم از $b^۲$ و کروشه سوم از $c^۲$، بزرگتر نیست، یعنی حاصل ضرب آن‌ها، از $a^۲b^۲c^۲$ بزرگتر نیست؛ پس

$$A \leq \sqrt{a^۲b^۲c^۲} = abc$$

به‌ازای $a=b=c$، برابری $A=abc$ و به ازای متفاوت بودنِ دست کم دو تا از عددهای a و b و c، نابرابری $A < abc$ به دست می‌آید.

۲۳۵. سمت چپ نابرابری را، تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲-۲mx+۴m-۳=(x-m)^۲-m^۲+۴m-۳=$$
$$=(x-m)^۲-(m-۱)(m-۳)$$

$(x-m)^۲$، مقداری غیر منفی است. ببینیم، برای چه مقدارهایی از m داریم:

$$-(m-۱)(m-۳)\geq ۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۳)\leq ۰$$

باید از دو عامل ضرب، یکی مثبت و دیگری منفی (یا صفر) باشد:

اگر $m-۱\geq ۰$ و $m-۳\leq ۰$، آن وقت به نتیجه $۱\leq m\leq ۳$ می‌رسیم؛

اگر $m - 1 < 0$ و $m - 3 > 0$، به نتیجهٔ ناسازگار $m < 1$ و $m > 3$ می‌رسیم؛

بنابراین

$$-(m-1)(m-3) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 3$$

و همین، جواب مساله است. به ازای $1 \leq m \leq 3$، نابرابری به ازای همهٔ مقدارهای x برقرار است.

۲۳۶. در مسالهٔ ۲۲۹ ثابت کردیم (برای x و y و z مثبت):

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

با توجه به این نابرابری اتحادی، داریم:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}};$$

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

با ضرب این دو نابرابری در یکدیگر، نابرابری مورد نظر به دست می‌آید.

۲۳۷. این نابرابری اتحادی را می‌شناسیم:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

با توجه به این نابرابری، می‌توان نوشت:

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2, c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$$

بنابراین

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2(a^2b^2 + c^2d^2) \geq 4abcd$$

زیرا

$$a^۲b^۲ + c^۲d^۲ \geq ۲\sqrt{abcd}$$

یادداشت. ضمن مساله‌ها، این سه نابرابری را دیدیم

$$۱)\ \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

$$۲)\ \frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

$$۳)\ \frac{a+b+c+d}{۴} \geq \sqrt[۴]{abcd}$$

این نابرابری‌ها را می‌توان در حالت کلی نوشت. ثابت می‌کنند، به فرض مثبت بودن $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n، همیشه نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n}$$

که به آن، **نابرابری میانگین‌ها** گویند: در واقع

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{n}$$

را **میانگین حسابی** و $\sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n}$ را **میانگین هندسی** n عدد $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌نامند.

۲۳۸. با مجذور کردن دو طرف نابرابری، به دست می‌آید:

$$۱ + ۲\sin x \cos x \leq ۲ \Rightarrow ۲\sin x\cos x \leq ۱$$

به جای عدد ۱، در سمت راست نابرابری $\sin^۲ x + \cos^۲ x$ قرار می‌دهیم و جملهٔ سمت چپ را به سمت راست می‌بریم:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x \cos x \geq ۰ \Rightarrow (\sin x - \cos x)^۲ \geq ۰$$

که درستی آن روشن است.

.۲۳۹

$$۱)\ ۳x + ۲ < ۵x + ۶ \Rightarrow -۲x < ۴ \Rightarrow x > -۲;$$

$$۲)\ x > ۳x + ۵ \Rightarrow -۲x > ۵ \Rightarrow x < -\frac{۵}{۲};$$

$$۳)\ (x + ۲)(۲x + ۱) < (۲x - ۳)(x - ۵) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۵x + ۲ < ۲x^۲ - ۱۳x + ۱۵ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۱۸x < ۱۳ \Rightarrow x < \frac{۱۳}{۱۸}$$

۴) داریم: $x(x - ۴) \leq ۰$. برای این که حاصل ضرب x در $x - ۴$ برابر صفر شود، باید داشته باشیم $x = ۰$ یا $x = ۴$. برای این که، این حاصل ضرب، منفی باشد، باید یکی از دو عامل ضرب منفی و دیگری مثبت باشد:

اگر $x < ۰$ و $x - ۴ > ۰$، آن وقت، به نتیجه ناسازگار $x < ۰$ و $x > ۴$ می‌رسیم که پذیرفتنی نیست؛

اگر $x > ۰$ و $x - ۴ < ۰$، به جواب پذیرفتنی $۰ < x < ۴$ می‌رسیم.

پاسخ. $۰ \leq x \leq ۴$.

۵) به حل نامعادلهٔ $(x - ۱)(۲x + ۹) \geq ۰$ منجر می‌شود:

$$\begin{cases} x - ۱ \geq ۰ \\ ۲x + ۹ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۱ \\ x \geq -\frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow x \geq ۱$$

(وقتی $x \geq ۱$، به طور طبیعی $x > -\frac{۹}{۲}$)؛

$$\begin{cases} x - ۱ \leq ۰ \\ ۲x + ۹ \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq ۱ \\ x \leq -\frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow x \leq -\frac{۹}{۲}$$

پاسخ. $-\frac{۹}{۲} \le x$ یا $۱ \ge x$.

۶) به حل این نامعادله، منجر می‌شود:

$$۴x^۲ + ۷x - ۱۱ \le ۰ \Rightarrow (x-۱)(۴x+۱۱) \le ۰;$$

$$\begin{cases} x - ۱ \le ۰ \\ ۴x + ۱۱ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le ۱ \\ x \ge -\frac{۱۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱۱}{۴} \le x \le ۱;$$

$$\begin{cases} x - ۱ \ge ۰ \\ ۴x + ۱۱ \le ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge ۱ \\ x \le -\frac{۱۱}{۴} \end{cases} \text{(ناپذیرفتنی)}$$

پاسخ. $-\frac{۱۱}{۴} \le x \le ۱$.

$$۷)\ \frac{x}{x+۲} < ۱ \Rightarrow \frac{x}{x+۲} - ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{-۲}{x+۲} < ۰$$

صورت کسر منفی است، پس برای این که مقدار کسر منفی باشد، باید مخرج، مقداری مثبت شود: $x + ۲ > ۰$، یعنی $x > -۲$.

$$۸)\ ۵ < \frac{۲x-۱}{۲x+۱} \Rightarrow ۵ - \frac{۲x-۱}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{۸x+۶}{۲x+۱} < ۰$$

$$\begin{cases} ۸x + ۶ > ۰ \\ ۲x + ۱ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{۳}{۴} \\ x < -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۳}{۴} < x < -\frac{۱}{۲};$$

$$\begin{cases} ۸x + ۶ < ۰ \\ ۲x + ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{۳}{۴} \\ x > -\frac{۱}{۲} \end{cases} \text{(پذیرفتنی نیست)}$$

پاسخ. $-\frac{۳}{۴} < x < -\frac{۱}{۲}$.

$$۹)\ \frac{x}{x+۱} < \frac{x-۱}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+۱} - \frac{x-۱}{x} < ۰ \Rightarrow$$

$$= \frac{۱}{x(x+۱)} < ۰;$$

$$\begin{cases} x > ۰ \\ x + ۱ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۰ \\ x < -۱ \end{cases}$$ (پذیرفتنی نیست)

$$\begin{cases} x < ۰ \\ x + ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < ۰ \\ x > -۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ < x < ۰$$

پاسخ. $-۱ < x < ۰$.

۲۴۰. در آغاز، به دو نکتهٔ اساسی توجه کنید:

I. متغیر t را در نظر بگیرید و فرض کنید بدانیم، این متغیر، بین دو عدد قرینهٔ a و $-a$ واقع باشد $(a > ۰)$: $-a < t < a$. روشن است که، در این صورت، قدر مطلق t، از a کوچکتر است:

اگر $-a < t < a$، آن وقت $|t| < a$.

به عنوان نمونه، اگر $-۲ < t < ۲$، آن وقت $|t| < ۲$.

نابرابری $|t| < a$ را می‌توان، بدون نشانهٔ قدر مطلق و به صورت $t^۲ < a^۲$ نوشت. در واقع، در نابرابری $|t| < a$، دو طرف نابرابری، مقدارهایی مثبت‌اند و، بنابراین، می‌توان آن‌ها را مجذور کرد.

به این ترتیب، نامعادله‌ای مثل

$$-۵ < ۲x + ۱ < ۵$$

را می‌توان از شکل نابرابری مضاعف (که شامل دو بار نشانهٔ $<$ است) در آورد و به صورت

$$(۲x + ۱)^۲ < ۲۵$$

نوشت. ادامهٔ حل نامعادله، دشوار نیست:

$$(۲x + ۱)^۲ - ۲۵ < ۰ \Rightarrow (۲x + ۱ - ۵)(۲x + ۱ + ۵) < ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۴(x-۲)(x+۳) < ۰;$$

$$\begin{cases} x-۲<۰ \\ x+۳>۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<۲ \\ x>-۳ \end{cases} \Rightarrow -۳ < x < ۲$$

برای حالت دوم، یعنی وقتی $۲ - x$ مثبت و $x + ۳$ منفی باشد، جوابی به دست نمی‌آید.

در ضمن، از جواب می‌توان خود را به معادلهٔ اصلی رسانید. اگر همهٔ جمله‌های نابرابری مضاعف $۲ > x > -۳$ را دو برابر کنیم، به دست می‌آید:

$$-۶ < ۲x < ۴$$

و اگر به هر سه جمله، یک واحد اضافه کنیم، به همان نامعادلهٔ اصلی می‌رسیم:

$$-۵ < ۲x + ۱ < ۵$$

II. اکنون این نابرابری مضاعف را در نظر می‌گیریم:

$$a < t < b \qquad (*)$$

در این‌جا، a و b قرینهٔ یکدیگر نیستند، ولی می‌توان نابرابری مضاعف را، به صورتی درآورد که، جمله‌های دو سوی آن، قرینهٔ یکدیگر باشند.

ابتدا میانگین حسابی a و b را به دست می‌آوریم: $\frac{a+b}{۲}$؛ سپس، این میانگین را از هر سه جملهٔ نابرابری مضاعف $(*)$ کم می‌کنیم:

$$a - \frac{a+b}{۲} < t - \frac{a+b}{۲} < b - \frac{a+b}{۲}$$

که، بعد از ساده کردن، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{a-b}{۲} < t - \frac{a+b}{۲} < \frac{b-a}{۲}$$

که در آن، $\frac{a-b}{۲}$ و $\frac{b-a}{۲}$ قرینه یکدیگرند.

فرض کنید، بخواهیم این نامعادله را حل کنیم:

$$-۱ < ۵x - ۲ < ۹$$

میانگین حسابی ۱− و ۹ برابر است با $۴ = \frac{۹-۱}{۲}$. از هر سه جملهٔ نامعادله، ۴ واحد کم می‌کنیم:

$$-۵ < ۵x - ۶ < ۵$$

و، سپس، شبیه حالت I حل را ادامه می‌دهیم:

$$(۵x-۶)^۲ < ۲۵ \Rightarrow (۵x-۶)^۲ - ۵^۲ < ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (۵x-۶-۵)(۵x-۶+۵) < ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (۵x-۱۱)(۵x-۱) < ۰;$$

که به پاسخ $\frac{۱}{۵} < x < \frac{۱۱}{۵}$ می‌رسد.

اکنون دیگر، حل نامعادله‌های مسالهٔ ۲۴۰، بدون دشواری به انجام می‌رسد. در این‌جا، پاسخ‌ها را داده‌ایم:

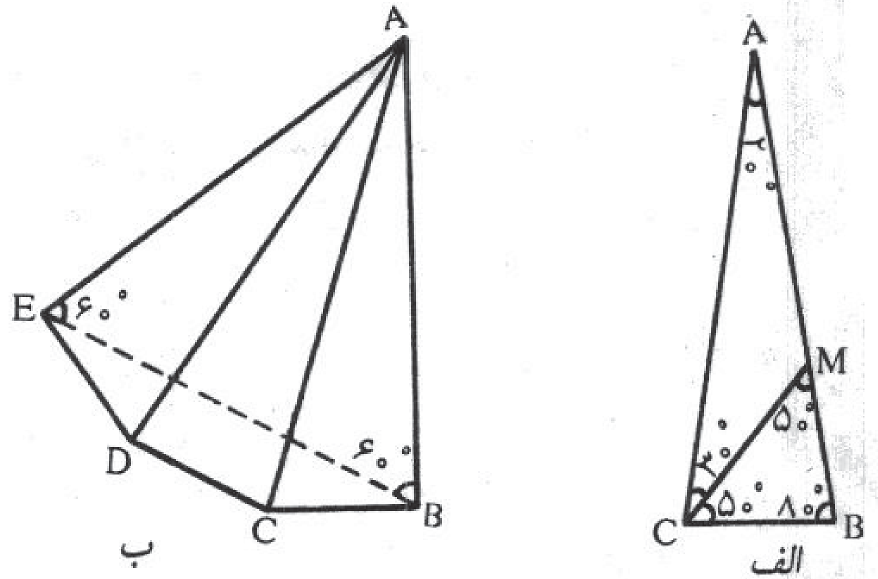
۱) $-\frac{۳}{۲} < x < \frac{۱}{۲}$؛ ۲) $-۱ < x < ۱$؛

۳) $\frac{۲}{۲۱} < x < \frac{۷}{۲۱}$.

یادداشت. نامعادله‌های مضاعف را، به طور مستقیم هم می‌توان حل کرد. نامعادلهٔ مضاعف

$$-۲ < ۷x + ۴ < ۵$$

را در نظر بگیرید. در واقع، در این‌جا، با دستگاهی شامل دو نامعادله سروکار



شکل ۱۱۶

داریم که باید جواب مشترک آن‌ها را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} ۷x + ۴ > -۲ \\ ۷x + ۴ < ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷x > -۶ \\ ۷x < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{۶}{۷} \\ x < \frac{۱}{۷} \end{cases}$$

و بنابراین، مجموعهٔ جواب، چنین است: $-\frac{۶}{۷} < x < \frac{۱}{۷}$.

۲۴۱. این، یک مسالهٔ هندسی است. آن را، به این مناسبت در این‌جا آورده‌ایم که با نمونه‌ای از کاربرد نابرابری‌ها در هندسه، آشنا شوید.

با فرض $\widehat{A} = ۲۰^\circ$ و $|AB| = |AC|$، باید ثابت کنیم (شکل ۱۱۶):

$$۱)\ |AB| > ۲|BC|, \quad ۲)\ |AB| < ۳|BC|$$

۱) روی ساق AB، پاره‌خط راست BM را با طولی برابر طول پاره‌خط راست BC جدا می‌کنیم. چون $|BM| = |BC|$، باید ثابت کنیم:

$$|AM| > |BC|$$

در مثلث AMC، ضلع AM روبه‌روی زاویهٔ ۳۰ و ضلع CM روبه‌روی زاویهٔ ۲۰ درجه است؛ ۳۰ درجه از ۲۰ درجه بیشتر است، پس، ضلع روبه‌روی به زاویهٔ ۳۰ درجه (یعنی AM)، طولی بیشتر از ضلع روبه‌روی به زاویهٔ ۲۰ درجه، یعنی CM دارد:

$$|AM| > |CM|$$

با همین استدلال، در مثلث BMC، به دست می‌آید:

$$|CM| > |BC|$$

بنابراین $|AM| > |BC|$ و، در نتیجه $|MB| + |AM|$، یعنی $|AB|$ (طول ساق) از $۲|BC|$ (دو برابر طول قاعده) بزرگتر است.

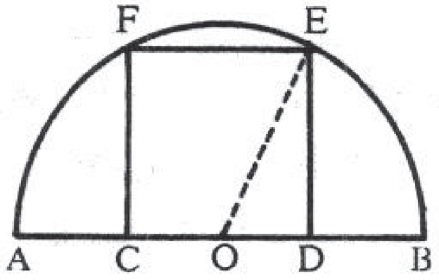
۲) مثلث‌های ACD و ADE را، برابر با مثلث ABC و به صورتی که در شکل ۱۱۶ـب دیده می‌شود، می‌سازیم. روشن است که مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است (هر یک از زاویه‌های آن، برابر ۶۰ درجه است)، بنابراین طول پاره‌خط راست BE، برابر با طول ساق مثلث (AB) می‌شود. از طرف دیگر روشن است که

$$|BE| < |BC| + |CD| + |DE| = ۳|BC|$$

(کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه، طول پاره‌خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند). پس $|AB| < ۳|BC|$.

حل مساله به یاری معادله

۲۴۲. فرض می‌کنیم، بعد از x ماه، ذخیرهٔ دو برادر، برابر باشد. بعد از گذشت x ماه، جمشید $۳۰۰۰۰ + ۲۰۰۰x$ ریال و برادرش



شکل ۱۱۷

$۵۰۰۰۰ + ۳۰۰۰x$ ریال خواهند داشت و باید داشته باشیم:

$$۲۰۰۰x + ۳۰۰۰۰ = ۳۰۰۰x + ۵۰۰۰۰ \Rightarrow x = ۲۵$$

بعد از ۲۵ ماه، (یعنی ۲ سال و یک ماه)، ذخیرهٔ دو برادر، برابر می‌شود؛ در آن زمان، هر یک ۸۰۰۰۰ ریال ذخیره دارند.

۲۴۳. تعداد شاگردان کلاس را x می‌گیریم. باید داشته باشیم

$$۲x + ۹ = ۴x - ۴۲ \Rightarrow x = \frac{۵۱}{۲} = ۲۵\frac{۱}{۲}$$

ولی، تعداد دانش‌آموزان، نمی‌تواند عددی کسری باشد. مساله، جواب ندارد.

۲۴۴. روشن است که نقطهٔ O، مرکز نیم‌دایره در وسط ضلع CD از مربع $ABCD$ قرار دارد (شکل ۱۱۷). اگر طول ضلع مربع را x بگیریم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODE داریم:

$$|OD|^۲ + |DE|^۲ = |OE|^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} + x^۲ = ۲۵$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x = ۲\sqrt{۵}$.

۲۴۵. اگر عدد سوم را x فرض کنیم، پنج عدد، چنین‌اند:

$$x - ۴, x - ۲, x, x + ۲, x + ۴$$

که باید مجموع آن‌ها، برابر ۱۲۵ باشد:

$$(x - ۴) + (x - ۲) + x + (x + ۲) + (x + ۴) = ۱۲۵$$

از آن‌جا $x = ۲۵$.

پاسخ. ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹.

۲۴۶. اگر سن برادر کوچکتر را x بگیریم، سن برادر بزرگتر $x - ۳۰$ می‌شود و، با توجه به شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$(۳۰ - x) + ۱ = ۳(x + ۱) \Rightarrow ۴x = ۲۸$$

پاسخ. برادر کوچکتر ۷ ساله و برادر بزرگتر ۲۳ ساله است.

۲۴۷. تعداد تخم‌مرغ‌ها را x می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$۴۵x + ۵۰۰ = ۶۰x - ۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰$$

خرید ۱۰۰ تخم‌مرغ برابر است با $۴۵ \times ۱۰۰ + ۵۰۰$، یعنی ۵۰۰۰ ریال. پس هر تخم‌مرغ را ۵۰ ریال خریده است.

۲۴۸. مزد روزانهٔ پدر را x و مزد روزانهٔ پسر را y بگیرید، به این دستگاه می‌رسید:

$$\begin{cases} ۱۳x + ۷y = ۵۳۹۰ \\ ۹x + ۷y = ۳۹۹۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۳۵۰ \\ y = ۱۲۰ \end{array} \right.$$

۲۴۹. صورت کسر را x و مخرج آن را y فرض کنید، به این دستگاه می‌رسید:

$$\begin{cases} \dfrac{x + ۱}{y} = \dfrac{۳}{۴} \\ \dfrac{x + ۲}{y} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x - ۳y + ۴ = ۰ \\ ۲x - y + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -۴ \\ y = -۴ \end{array} \right.$$

اگر در کسر $\frac{-۴}{-۴}$، یک واحد به صورت اضافه کنیم، به کسر $\frac{-۳}{-۴}$ تبدیل می‌شود که با کسر $\frac{۳}{۴}$ هم‌ارز است و اگر دو واحد به صورت آن اضافه کنیم، به کسر $\frac{-۲}{-۴}$ تبدیل می‌شود که با کسر $\frac{۱}{۲}$ هم‌ارز است.

۲۵۰. بهتر است، به جای وزن گلدان اصلی، وزن مقدار مس داخل آن را x گرم بگیریم، بنابراین، وزن نقرهٔ آن $۸x$ گرم و، وزن گلدان برابر $۹x$ گرم می‌شود. باید داشته باشیم:

$$\frac{۸x}{۹x + ۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = ۱۰۰$$

پاسخ. ۹۰۰ گرم.

۲۵۱. عدد را a، خارج قسمت تقسیم a بر ۸ را $q_۱$ و خارج قسمت تقسیم a بر ۹ را $q_۲$ می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a = ۸q_۱ + ۳ \\ a = ۹q_۲ + ۵ \end{cases}$$

از کم کردن این دو معادله از یکدیگر، به دست می‌آید:

$$۸q_۱ - ۹q_۲ - ۲ = ۰$$

چون، مجموع $q_۱ + q_۲$ برابر ۱۳ شده است، باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} ۸q_۱ - ۹q_۲ = ۲ \\ q_۱ + q_۲ = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} q_۱ = ۷ \\ q_۲ = ۶ \end{array} \right.$$

بنابراین، عدد مورد نظر، برابر

$$۸q_۱ + ۳ = ۸ \times ۷ + ۳ = ۵۹$$

بوده است.

۲۵۲. تمام پول را x تومان می‌گیریم. سهم اولی چنین می‌شود:

$$۲۰ + \frac{x - ۲۰}{۱۶} = \frac{x + ۳۰۰}{۱۶}$$

$\frac{x + ۳۰۰}{۱۶}$ (سهم اولی) و ۱۵ تومانی را که دومی برداشته است، از تمام پول (x) کم می‌کنیم:

$$x - \left(\frac{x + ۳۰۰}{۱۶} + ۱۵\right) = \frac{۱۵x - ۵۴۰}{۱۶}$$

دومی، یک ششم این مبلغ به اضافهٔ ۱۵ تومان برداشته است؛ یعنی سهم دومی برابر است با

$$۱۵ + \frac{۱۵x - ۵۴۰}{۹۶} = \frac{۱۵x + ۹۰۰}{۹۶} = \frac{۵x + ۳۰۰}{۳۲}$$

سهم دو نفر، برابر شده است، پس

$$\frac{x + ۳۰۰}{۱۶} = \frac{۵x + ۳۰۰}{۳۲} \Rightarrow x = ۱۰۰$$

در ضمن، سهم هر یک از این دو نفر برابر ۲۵ تومان می‌شود.

۲۵۳. ضلع بزرگتر (طول مستطیل) را x و عرض آن را y می‌گیریم؛ مساحت مستطیل برابر xy می‌شود و با توجه به شرط‌های مساله، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} (x - ۳)(y - ۲) = xy - ۴۸ \\ (x + ۳)(y + ۲) = xy + ۶۰ \end{cases}$$

که بعد از انجام ضرب‌ها و ساده کردن‌ها، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۵۴ \\ ۲x + ۳y = ۵۴ \end{cases}$$

دو معادلهٔ دستگاه، در واقع، معرف یک معادله‌اند:

$$۲x + ۳y = ۵۴$$

و، به یاری یک معادلهٔ دو مجهولی، نمی‌توان مقدارهای مشخصی برای مجهول‌ها پیدا کرد. مساله، یک جواب مشخص (یا حتا چند جواب، به تعداد محدود) ندارد. مساله بی‌نهایت جواب دارد.

تنها می‌توان مرز مقدارهای x و y را پیدا کرد. چون x را، طول ضلع بزرگتر مستطیل گرفته‌ایم، باید داشته باشیم: $x \geq y$ (حالت $x = y$، وقتی پیش می‌آید که با حالت خاص مستطیل، یعنی مربع سرو کار داشته باشیم).
از معادله‌ای که به دست آورده‌ایم، نتیجه می‌شود:

$$y = \frac{۵۴ - ۲x}{۳}$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$x \geq \frac{۵۴ - ۲x}{۳} \Rightarrow ۳x \geq ۵۴ - ۲x \Rightarrow ۵x \geq ۵۴$$

که از آن نتیجه می‌شود: $x \geq ۱۰/۸$. ولی x را نمی‌توان هر عددی که از ۱۰/۸ بزرگتر است، در نظر گرفت. باید x را چنان انتخاب کرد که، برای y، عددی مثبت به دست آید. بنابراین باید داشته باشیم:

$$y = \frac{۵۴ - ۲x}{۳} > ۰ \Rightarrow ۵۴ - ۲x > ۰ \Rightarrow x < ۲۷$$

به این ترتیب، x می‌تواند هر عددی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$۱۰/۸ \leq x < ۲۷$$

مثلاً می‌توان $x = ۱۵$ در نظر گرفت که، در این صورت، برای y، عدد ۸ به دست می‌آید. مستطیل به طول ۱۵ و عرض ۸، با همهٔ شرط‌های مساله سازگار است.

یادداشت. معادله‌ای مثل $۲x + ۳y = ۵۴$ را، **معادلهٔ سیال** گویند. در هر معادلهٔ سیال، با توجه به شرط‌هایی که برای مجهول‌های آن وجود دارد، وقتی یکی از مجهول‌ها را (در محدوده‌ای که می‌تواند باشد) انتخاب کنیم، مجهول دوم، به خودی خود به دست می‌آید.

به عنوان مثال، فرض کنید x و y عددهایی طبیعی باشند و از ما خواسته باشند، مجموعهٔ جواب را (برای عددهای طبیعی x و y) در معادلهٔ

$$۲x + ۳y = ۵۴$$

پیدا کنیم. اگر y را بر حسب x به دست آوریم:

$$y = \frac{۵۴ - ۲x}{۳} = ۱۸ - \frac{۲x}{۳}$$

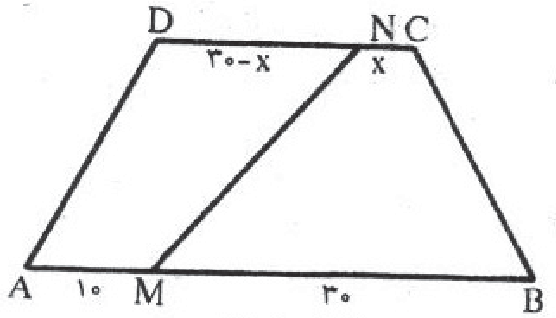
و روشن است، برای این که y، عددی طبیعی باشد، باید x بخش‌پذیر بر ۳ و، درضمن، کوچکتر از ۲۷ باشد (چرا؟). بنابراین، مجموعهٔ جواب (برای x و y طبیعی)، در معادلهٔ $۲x + ۳y = ۵۴$، چنین است:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۱۵ \\ y = ۸ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۱۲ \\ y = ۱۰ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۹ \\ y = ۱۲ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۶ \\ y = ۱۴ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۳ \\ y = ۱۶ \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = ۲۴ \\ y = ۲ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۲۱ \\ y = ۴ \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x = ۱۸ \\ y = ۶ \end{array} \right.$$

معادلهٔ سیال دارای ۸ جواب در مجموعهٔ عددهای طبیعی است.

اگر به جز طبیعی بودن عددهای x و y، در ضمن، شرط $x \geq y$ هم وجود داشت (مثلاً گفته شده بود: x ضلع بزرگتر، و y ضلع کوچکتر



شکل ۱۱۸

مستطیل است)، آن وقت، سه جواب نخست، کنار می‌رفت و پنج جواب آخر، به عنوان مجموعهٔ جواب برای معادلهٔ سیال، باقی می‌ماند.

*معادله‌های سیال را، برای نخستین بار، **دیوفانت**، ریاضی‌دان مکتب اسکندریه مطرح کرد، ولی بعدها، **محمد کرجی** ریاضی‌دان ایرانی زمان عضدالدوله دیلمی آن را ادامه داد و نمونه‌های زیادی از معادله‌های سیال را طرح و حل کرد.

۲۵۴. اگر سرمایهٔ این شخص را، در آغاز، x میلیون ریال فرض کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۲}x - ۱۰\right) - ۱۰ = ۲x$$

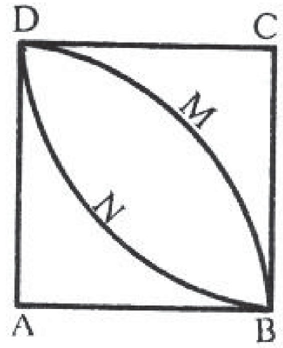
پاسخ. سرمایهٔ نخستین کاسب، ۱۰۰ میلیون ریال بوده است.

۲۵۵. با توجه به شکل ۱۱۸، اگر M، نقطهٔ انتخابی روی قاعدهٔ بزرگتر باشد، داریم:

$$|AM| = ۱۰, |BM| = ۳۰$$

طول پاره‌خط راست CN را x می‌گیریم. اگر طول ارتفاع ذوزنقه برابر h باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{h}{۲}(۳۰ + x) = \frac{h}{۲}[۱۰ + (۳۰ - x)] \Rightarrow x = ۵$$



شکل ۱۱۹

یعنی باید قاعدهٔ کوچکتر را به نسبت ۵ : ۱ تقسیم کرد.

۲۵۶. سرعت‌ها را $v_۱$ و $v_۲$ می‌گیریم ($v_۱ > v_۲$). باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{۶۰}{v_۱ + v_۲} = ۳ \\ \dfrac{۶۰}{v_۱ - v_۲} = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_۱ + v_۲ = ۲۰ \\ v_۱ - v_۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_۱ = ۱۲ \\ v_۲ = ۸ \end{array} \right.$$

۲۵۷. طول ضلع مربع را x بگیریم (شکل ۱۱۹). اگر مساحت‌های دو ربع دایرهٔ $ABMD$ و $BNDC$ را با هم جمع کنیم، مثل این است که مساحت مربع را با مساحت بین دو کمان BMD و BND جمع کنیم. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۴}\pi x^۲ + \frac{۱}{۴}\pi x^۲ = x^۲ + ۵۷ \Rightarrow x = ۱۰$$

۲۵۸. پاسخ. نقطهٔ C روی کمان نیم‌دایره، در جایی است که، فاصلهٔ آن از قطر AB، برابر $\frac{۱}{۶}\pi R$، یا به تقریب برابر $۰/۵۲R$ باشد که، در آن، R طول شعاع دایره است.

۲۵۹. فرض می‌کنیم، x ساعت بعد از آغاز کار B (یعنی بعد از ساعت ۷ صبح)، کار تمام شده باشد. A روی هم ۲ + x ساعت کار کرده و،

بنابراین $\frac{x+۲}{۱۵}$ کار را انجام داده است؛ B، در x ساعت کار خود، $\frac{x}{۱۰}$ کار را انجام می‌دهد؛ مجموع آن‌ها باید برابر تمام کار، یعنی ۱ باشد:

$$\frac{x+۲}{۱۵}+\frac{x}{۱۰}=۱ \Rightarrow x=۵\frac{۱}{۵}$$

۵ ساعت و ۱۲ دقیقه، بعد از ساعت ۷ صبح، کار تمام می‌شود.

پاسخ. ۱۲ دقیقه بعد از ظهر.

۲۶۰. الف) فرض می‌کنیم، پیکان در x کیلومتری شهر A به اتوبوس رسیده باشد. در این صورت، پیکان $\frac{x}{۴۰}$ ساعت و اتوبوس $\frac{x}{v}$ ساعت در راه بوده‌اند. چون پیکان، $\frac{۱}{۲}$ ساعت دیرتر حرکت کرده است، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{v}-\frac{x}{۴۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲۰v}{۴۰-v} \qquad (۱)$$

اگر بخواهیم، پیش از رسیدن اتوبوس به شهر B، ماشین پیکان به او برسد، باید x، کمتر از ۱۰۵ کیلومتر باشد:

$$x<۱۰۵ \Rightarrow \frac{۲۰v}{۴۰-v}<۱۰۵$$

$v-۴۰$، عددی مثبت است (اگر سرعت اتوبوس، از سرعت پیکان بیشتر باشد، پیکان هرگز به اتوبوس نمی‌رسد). بنابراین، می‌توان دو طرف نامعادلهٔ اخیر را در $x-۴۰$ ضرب کرد، بدون این که جهت نابرابری عوض شود:

$$۲۰v<۱۰۵(۴۰-v) \Rightarrow v<۳۳/۶$$

سرعت اتوبوس باید از ۳۳/۶ کیلومتر در ساعت کمتر باشد، تا در مسیر ۱۰۵ کیلومتری، پیکان به آن برسد.

از طرف دیگر، اتوبوس همهٔ فاصلهٔ بین A و B را در $\frac{۱۰۵}{v}$ ساعت طی می‌کند. پیکان، بعد از x کیلومتر به اتوبوس می‌رسد و، برای رسیدن دوبارهٔ به A، باید x کیلومتر دیگر برگردد، بنابراین $\frac{۲x}{۴۰}$ یا $\frac{x}{۲۰}$ ساعت در راه است. می‌خواهیم وقتی اتوبوس به B رسیده است، پیکان به A نرسیده باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۰۵}{v} < \frac{x}{۲۰} + \frac{۱}{۲} = \frac{x + ۱۰}{۲۰}$$

که اگر به جای x، مقدارش را از برابری (۱) قرار دهیم، به این نامعادله می‌رسیم:

$$v^۲ + ۲۵۰v - ۸۴۰۰ > ۰$$

سه جمله‌ای درجه دوم، سمت چپ نابرابری، دارای دو ریشه است:

$$v_۱ = ۳۰, v_۲ = -۲۸۰$$

بنابراین، سه جمله‌ای تجزیه می‌شود:

$$(v - ۳۰)(v + ۲۸۰) > ۰$$

$v + ۲۸۰$، عددی مثبت است (زیرا $v > ۴۰$)، پس می‌توان دو طرف نامعادله را بر آن تقسیم کرد، به دست می‌آید:

$$v - ۳۰ > ۰ \Rightarrow v > ۳۰$$

برای این‌که اتوبوس، پیش از پیکان به مقصد برسد، باید سرعتی بیش از ۳۰ کیلومتر داشته باشد.

پاسخ. $۳۰ < v < ۳۳/۶$.

ب) پاسخ. $۶۰ < v < ۶۷/۲$.

۲۶۱. سرعت دوچرخه سوار سوم را v می‌گیریم و فرض می‌کنیم، در x کیلومتری نقطهٔ آغاز حرکت، به دوچرخه سوار دوم رسیده باشد. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{v}+\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۶v}{v-۱۲}$$

یک ساعت و نیم بعد، دوچرخه سوار سوم، علاوه بر x کیلومتر قبلی، به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}v$ کیلومتر دیگر رکاب می‌زند تا به دوچرخه سوار اول برسد. پس

$$\frac{x+\frac{۳}{۲}v}{v}+\frac{۱}{۲}=\frac{x+\frac{۳}{۲}v}{۱۵}\Rightarrow x=\frac{۶۰v-۳v^۲}{۲v-۳۰}$$

دو مقداری که برای x به دست آورده‌ایم، باید با هم برابر باشند:

$$\frac{۶v}{v-۱۲}=\frac{۶۰v-۳v^۲}{۲v-۳۰}$$

چون $v \neq ۰$، می‌توان دو طرف برابری را بر $۳v$ تقسیم کرد:

$$\frac{۲}{v-۱۲}=\frac{۲۰-v}{۲v-۳۰}\Rightarrow v^۲-۲۸v+۱۸۰=۰\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (v-۱۰)(v-۱۸)=۰$$

سرعت دوچرخه سوار سوم باید از دو دوچرخه سوار دیگر، بیشتر باشد، بنابراین $v-۱۰>۰$ و

$$v-۱۸=۰\Rightarrow v=۱۸$$

۲۶۲. سرعت جریان آب رودخانه را x کیلومتر در ساعت و سرعت قایق را در آب ساکن، v کیلومتر در ساعت فرض می‌کنیم. در این صورت،

سرعت قایق در جهت جریان آب، برابر $v+x$ و در خلاف جهت جریان آب برابر $v-x$ کیلومتر در ساعت خواهد شد.

اگر جهان‌گرد ۳ کیلومتر در جهت جریان آب حرکت کند، به اندازهٔ $\frac{۳}{v+x}$ ساعت، و اگر ۲ کیلومتر در خلاف جهت جریان آب حرکت کند، به اندازهٔ $\frac{۲}{v-x}$ ساعت را از دست می‌دهد. ولی بنابر شرط مساله، باید این دو مقدار با هم برابر باشند:

$$\frac{۳}{v+x}=\frac{۲}{v-x}\Rightarrow v=۵x$$

از طرف دیگر، جهان‌گرد، برای رفت و برگشت از A به B و، سپس، از B به A (۲۰ کیلومتر در جهت جریان آب و ۲۰ کیلومتر در خلاف جهت جریان آب) به اندازهٔ ۱۰ ساعت وقت صرف می‌کند، بنابراین

$$\frac{۲۰}{v+x}+\frac{۲۰}{v-x}=۱۰$$

که اگر $v=۵x$ را در نظر بگیریم، بعد از عمل‌های ساده، به این معادله می‌رسیم:

$$۶x^{۲}-۵x=۰$$

و چون $x\neq ۰$، بنابراین $x=\frac{۵}{۶}$.

پاسخ. آب رودخانه، با سرعت ساعتی $\frac{۵}{۶}$ کیلومتر در جریان است.

۲۶۳. سرعت پیاده را $v_۱$ کیلومتر و سرعت اسب را $v_۲$ کیلومتر در ساعت می‌گیریم؛ در نتیجه، سرعت دوچرخه $۲v_۱$ کیلومتر در ساعت می‌شود. فاصلهٔ بین دو شهر A و B را، $۲x$ فرض می‌کنیم.

چون سرعت دوچرخه بیش از سرعت اسب است، نقطهٔ ملاقات آن‌ها به شهر A نزدیکتر است تا به شهر B.

در لحظهٔ ملاقات دوچرخه با اسب، دوچرخه $x + ۳$ کیلومتر و اسب، $x - ۳$ کیلومتر پیموده‌اند؛ بنابراین

$$\frac{x+۳}{۲v_۱} = \frac{x-۳}{v_۲} = ۲$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$v_۱ = \frac{x+۳}{۴} \text{ و } v_۲ = \frac{x-۳}{۲}$$

در لحظهٔ ملاقات دوچرخه با پیاده، هر کدام ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه، یعنی $\frac{۷}{۳}$ ساعت در حرکت بوده‌اند و، مجموع طول راه‌هایی که به وسیلهٔ دوچرخه و پیاده پیموده شده است، باید برابر فاصلهٔ از A تا B، یعنی $۲x$ کیلومتر باشد:

$$\frac{۷}{۳}(v_۱ + ۲v_۱) = ۲x \Rightarrow ۷v_۱ = ۲x$$

که اگر $v_۱ = \frac{x+۳}{۴}$ را در نظر بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$۷ \times \frac{x+۳}{۴} = ۲x \Rightarrow x = ۲۱$$

پاسخ. فاصلهٔ بین شهرهای A و B، ۴۲ کیلومتر، سرعت پیاده ۶ کیلومتر در ساعت، سرعت اسب ۹ کیلومتر در ساعت و سرعت دوچرخه ۱۲ کیلومتر در ساعت.

۲۶۴. فرض می‌کنیم، اولی به تنهایی در x ساعت و دومی به تنهایی در y ساعت، کار را تمام کنند. به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{۶}{x} + \frac{۶}{y} = ۱ \\ \frac{۶}{x} + \frac{۴}{y} = ۰/۸۰ = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

با کم کردن دو معادلهٔ دستگاه از یکدیگر، مقدار y به دست می‌آید:

$$\frac{۶}{y} - \frac{۴}{y} = ۱ - \frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow y = ۱۰$$

پاسخ. منشی اول به تنهایی در ۱۰ ساعت و منشی دوم به تنهایی در ۱۵ ساعت، کار را به پایان می‌رسانند.

۲۶۵. عددها را x و y و $y > x$ فرض می‌کنیم. حاصل ضرب اشتباه، برابر $xy + ۲۰۰$ است. بنابراین باید داشته باشیم:

$$xy + ۲۰۰ = ۵۰x + ۲۵ \Rightarrow y = ۵۰ - \frac{۱۷۵}{x}$$

در ضمن $x > ۲۵$، زیرا در تقسیم یک عدد طبیعی بر x، باقی‌مانده‌ای برابر ۲۵ به دست آمده است و، همیشه، باقی‌مانده از بخشیاب (مقسوم‌علیه) کوچکتر است.

عدد ۱۷۵، تنها بر دو عدد بزرگتر از ۲۵ بخش‌پذیر است: ۳۵ و ۱۷۵. ولی، اگر فرض کنیم $x = ۱۷۵$، برای y، عددی کوچکتر از x پیدا می‌شود ($y = ۴۹$). در نتیجه $x = ۳۵$ و $y = ۴۵$.

پاسخ. ۳۵ و ۴۵.

۲۶۶. با رقم‌های a و b و c، می‌توان شش عدد سه رقمی ساخت:

$$\overline{abc},\ \overline{acb},$$
$$\overline{bac},\ \overline{bca},$$
$$\overline{cab},\ \overline{cba},$$

رقم a، دو بار در سدگان، دو بار در دهگان و دو بار در یکان به کار رفته است، بنابراین، در مجموع این ۶ عدد، مقدار a برابر است با

$$۲ \times ۱۰۰a + ۲ \times ۱۰a + ۲a = ۲۲۲a$$

به همین ترتیب، دربارهٔ رقم‌های b و c. بنا بر شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$۲۷۰۰ < ۲۲۲(a+b+c) < ۲۹۰۰$$

و یا

$$۱۲\frac{۶}{۳۷} < a+b+c < ۱۳\frac{۷}{۱۱۱}$$

$a+b+c$ عددی طبیعی است و، بین دو عدد $۱۲\frac{۶}{۳۷}$ و $۱۳\frac{۷}{۱۱۱}$، تنها یک عدد طبیعی وجود دارد: عدد ۱۳ پس

$$a+b+c = ۱۳$$

برای این که $\overline{abc}$، بزرگترین عدد سه رقمی، از بین این ۶ عدد باشد، در آغاز $a = ۹$ می‌گیریم؛ در این صورت $b + c = ۴$. چون c زوج و مخالف صفر است، تنها می‌تواند برابر ۲ باشد که، در آن صورت، برای b هم عدد ۲ به دست می‌آید، ولی می‌دانیم b و c دو رقم مختلف‌اند.

اکنون فرض می‌کنیم $a = ۸$، پس

$$b + c = ۵$$

اگر $c = ۲$ باشد (c عددی است زوج)، $b = ۳$ می‌شود و عدد ۸۳۲ به دست می‌آید. اگر $c > ۲$، $b < ۳$ و، در نتیجه $\overline{abc} < ۸۳۲$.

روشن است، a را هر عدد دیگری به جز ۸ بگیریم، عدد سه رقمی حاصل از ۸۳۲ کوچکتر می‌شود.

پاسخ. ۸۳۲.

۲۶۷. الف) با توجه به این که m، عددی درست و بزرگتر از واحد است، داریم:

$$a < b < c$$

عددهای ۲۸۳۵ و ۲۶۴۶ را تجزیه می‌کنیم:

$$۲۸۳۵ = ۳^۴ \times ۵ \times ۷;\ ۲۶۴۶ = ۳^۳ \times ۷^۲ \times ۲$$

c بزرگترین عدد است و باید ۲۶۴۶ بر آن بخش‌پذیر باشد. باید عددها را، بزرگترین مقدار ممکن گرفت تا مجموعشان حداکثر شود.

آیا $c = ۲۶۴۶$ را می‌توان پذیرفت؟ m نمی‌تواند شامل $۷^۲ \times ۲$ باشد، زیرا در آن صورت، ۲۸۳۵ بر آن بخش‌پذیر نمی‌شود و برای a، عددی طبیعی به دست نمی‌آید؛ m زوج نیست، ولی می‌تواند بر ۷ (و نه بر $۷^۲$) بخش‌پذیر باشد. بنابراین c، عددی زوج نیست، زیرا، اگر c عددی زوج باشد، در تقسیم بر m (که عددی فرد است)، خارج قسمت برابر عددی زوج می‌شود و، در آن صورت، b نمی‌تواند بخشیابی از عدد فرد ۲۸۳۵ باشد.

c را برابر $\frac{۲۶۴۶}{۲}$، یعنی ۱۳۲۳ می‌گیریم. چون b نمی‌تواند بر ۲×۷^۲ بخش‌پذیر باشد، ولی می‌تواند بر ۷ بخش‌پذیر باشد، پس حداکثر مقدار b، می‌تواند چنین باشد

$$b = ۲۶۴۶ : ۱۴ = ۱۸۹$$

c و b را، بزرگترین مقدارِ ممکن گرفتیم تا مجموع سه عدد حداکثر شود.

$$m = ۱۳۲۳ : ۱۸۹ = ۷$$

و به این ترتیب

$$a = ۱۸۹ : ۷ = ۲۷$$

پاسخ. $a = ۲۷$، $b = ۱۸۹$ و $c = ۱۳۲۳$.

ب) پاسخ. $a = ۸$، $b = ۵۶$ و $c = ۳۹۲$

۲۶۸. بنا به فرض داریم:

$$a + b + c = ۱۹, a = c + ۵$$

$$b + ۲c = ۱۴$$

c باید از ۵ کوچکتر باشد، زیرا اگر $c \geq ۵$، آن وقت، برای a عددی دو رقمی به دست می‌آید.

اگر $c = ۴$، آن وقت $b = ۶$ و $a = ۴ + ۵ = ۹$، که با همهٔ شرط‌های مساله می‌سازند.

اگر $c = ۳$، آن وقت $b = ۸$ و $a = ۳ + ۵ = ۸$ که با شرط

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = m$$

سازگار نیستند.

اگر $c < ۳$ ، آن وقت، برای b، عددی دو رقمی به دست می‌آید.

پاسخ. عدد سه رقمی برابر ۹۶۴ و $m = \frac{۳}{۲}$.